

# Grau en Matemàtiques

---

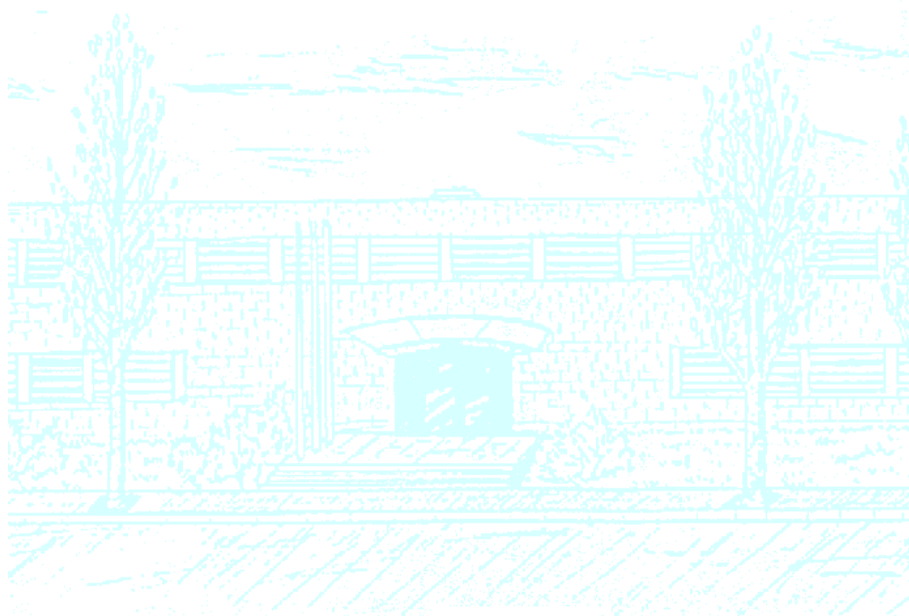
**Títol:** Anàlisi i desenvolupament de models matemàtics per a ritmes del son

**Autor:** Álvaro Díaz Sánchez

**Director:** Gemma Huguet i Albert Granados

**Departament:** Departament de Matemàtiques (749)

**Convocatòria:** 2017-2018



Universitat Politècnica de Catalunya  
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Grau en Matemàtiques  
Treball Fi de Grau

# Anàlisi i desenvolupament de models matemàtics per a ritmes del son

Álvaro Díaz Sánchez

Supervisat per Gemma Huguet i Albert Granados

Maig, 2018



Agraeixo als tutors del treball Gemma Huguet i  
Albert Granados el seu recolzament, ajuda i  
dedicació durant la realització d'aquest projecte.  
Sense ells segur que no haguès estat possible acabar-ho



## Abstract

The field of neuroscience studies the behavior and activity of the nervous system, in particular the regions of the brain involved in sleep regulation. In this project we consider a mathematical model for the sleep-wake cycle and we perform a numerical and analytical study based on fast-slow analysis. We prove the existence of relaxation oscillations which describe the sleep-wake cycle. To achieve this result we use numerical methods, bifurcation theory and theoretical results of dynamical systems.

## Keywords

Slow-fast analysis, relaxation oscillations, saddle-node bifurcation, sleep-wake networks

# Índex

<b>1</b>	<b>Introducció</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Model matemàtic</b>	<b>5</b>
2.1	Contextualització biològica . . . . .	5
2.2	Variables del model . . . . .	6
2.3	Motivació estudi teòric . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Teoria</b>	<b>10</b>
3.1	Punts d'equilibri . . . . .	10
3.2	Linealització . . . . .	10
3.3	Bifurcació sella-node . . . . .	11
3.4	Sistemes slow-fast . . . . .	12
3.5	Mètode d'extrems condicionats . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Discussió slow-fast</b>	<b>18</b>
4.1	Cas límit $\varepsilon = 0$ . . . . .	18
4.1.1	Subsistema ràpid . . . . .	18
4.1.2	Dinàmica del subsistema ràpid . . . . .	18
4.1.3	Dinàmica en els punts de plec . . . . .	23
4.1.4	Subsistema lent . . . . .	25
4.1.5	Límit singular: òrbita periòdica de relaxació . . . . .	28
4.2	Cas $\varepsilon > 0$ . . . . .	29
4.2.1	Hipòtesi 1 . . . . .	30
4.2.2	Hipòtesi 2 . . . . .	30
4.2.3	Hipòtesi 3 . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>33</b>

# 1. Introducció

En la biologia i la medicina la investigació científica està força acompanyada per les matemàtiques com a eina per intentar explicar i aprofundir en les ciències.

En el cas de la biologia, i en particular el camp de la neurociència, la utilització de models per intentar explicar el comportament, predir la durada i la qualitat del son és cada cop més freqüent. De diverses maneres es pot modelar l'activitat neuronal del nostre hipotàlem quan estem dormint o desperts. Tot i que intentar modelitzar el son pot ser molt difícil ja que existeixen múltiples aspectes condicionants, actualment es poden realitzar aproximacions bastant acurades que estan en constant millora gràcies als múltiples grups de recerca que existeixen en moltes universitats arreu del món.

Per poder descriure aquest processos, que canvien amb el pas del temps, és necessari el coneixement que aporten les equacions diferencials ordinàries i els sistemes dinàmics. Amb una base teòrica d'aquestes branques de les matemàtiques és possible aprofundir en el model, definir les característiques i poder estudiar-lo. Aquest treball no només s'ha realitzat des d'un punt de vista teòric, sinó que s'han fet servir diversos mètodes numèrics per complementar el coneixement teòric i poder confirmar les característiques del model.

Existeixen diferents models que descriuen els períodes de son-vigília i diferents tècniques per estudiar-los. En aquest treball s'ha escollit el model proposat per les doctores Victoria Booth i Cecilia G. Diniz en la publicació científica *Physiologically-based modeling of sleep-wake regulatory networks* [3].

El model proposat explica el comportament de les poblacions de neurones promotores dels estats vigília i son. Aquestes poblacions tenen una determinada activitat, que es pot mesurar de manera experimental. Aquestes dues poblacions no poden estar actives a la vegada. A l'estat adormit només actuen les neurones promotores de l'estat del son i a l'estat de vigília només ho fan les promotores d'aquest estat. En les equacions també conviu una tercera variable que és l'encarregada d'alternar els estats entre el son i la vigília. Aquest procés homeostàtic, com és conegut, funciona com un interruptor i quan té un valor determinat transmet el senyal a les poblacions de neurones per a que s'activin o s'inhibeixen.

Aquest sistema té la particularitat que les escales de temps són molt diferents. Les variables que descriuen l'activitat de les poblacions de neurones canvien de valor molt més ràpid que el procés homeostàtic. Aquest tipus de sistemes són coneguts com a sistema de descomposició lenta-ràpida (*slow-fast*). Més endavant s'explica amb detall l'evolució de les variables. De manera resumida, l'escala de temps per a les variables que mesura l'activitat de les neurones es molt més ràpida, d'ordre de magnitud de 5 segons aproximadament, que en la variable homeostàtica on és d'aproximadament unes 100 vegades més lenta. Aquest canvi té un sentit biològic ja que estem acostumats de canviar d'estat de manera instantània mentre que per l'estat de vigília, on va variant el valor del procés homeostàtic, la durada és molt més llarga.

Mitjançant simulacions directes, ràpidament s'observa un cicle límit on es completen els dos estats possibles, son i vigília, i es torna a començar al primer estat. L'objectiu d'aquest treball és estudiar aquest cicle, cosa que es farà mitjançant tècniques de sistemes *slow-fast*.

Per a estudiar aquest sistema usarem coneixements previs de l'assignatura de sistemes dinàmics, que ampliarem amb bibliografia extra. Com que el sistema té diferents escales de temps, haurem de separar l'estudi per a cada temps. Per fer aquesta part necessitarem representar diagrames de bifurcació, que calcularem usant mètodes numèrics. Per lligar l'estudi de les diferents escales de temps es farà servir un resultat teòric extret de la tesi doctoral del Dr. Carles Bonet, *Pertorbació singular d'òrbites periòdiques de relaxació* [4].

Aquest treball comença amb la presentació del model matemàtic, amb la contextualització biològica inclosa, continua amb els conceptes teòrics necessaris per poder entendre el treball i acaba amb la discussió



slow-fast del sistema on s'apliquen els conceptes teòrics i tècniques numèriques necessàries per tal de poder estudiar el cicle límit.

## 2. Model matemàtic

### 2.1 Contextualització biològica

El camp de la recerca sobre la son té una llarga tradició matemàtica intentant modelitzar i entendre els cicles de son-vigília associats als ritmes circadians.

Com tots sabem, després d'un període de vigília el nostre cos necessita inevitablement dormir. Aquest períodes, tant de son com de vigília, duren aproximadament 24h i són coneguts com a ritme circadians. Aquestes decisions es prenen per un grup d'unes 20000 neurones que estan situades al hipotàlem i es coneixen amb el nom de nucli supraquiasmàtic (SNC). Dintre del període de son podem diferenciar-ne dos tipus, la fase REM i la NREM. Els períodes de son tenen un subcicle d'una durada aproximadament de 90 minuts on apareix la fase REM i NREM del son. En la fase REM l'activitat cerebral és semblant al de l'estat de vigília, es produeixen els somnis i es capta molta informació del nostre entorn. En canvi a la fase NREM l'activitat cerebral és molt baixa. Aquesta fase es classifica en quatre, una primera de transició entre la vigília i el son, la segona fase, coneguda com a son lleuger, ocupa aproximadament el 50% del temps. La tercera fase és una transició cap al son profund on és molt difícil que ens despertem i és la fase que determina la qualitat del son [9].

Al SNC, la població de neurones està dividida en les que promouen l'estat de son i les que promouen l'estat de vigília. Aquestes poblacions s'inhibeixen mútuament [8] i la seva activitat regula els diferents estats. Així, quan la població que promou l'estat de son es troba activa suprimeix l'activitat de la població que promou l'estat de vigília, i viceversa. Els canvis entre els dos possibles estats es produeixen de manera instantània. Això ens fa pensar que existeix una mena d'interruptor que activa una població de neurones i desactiva l'altra. Estem parlant del procés homeostàtic del son, que regula la necessitat de dormir. En l'estat de vigília, aquest procés es va carregant fins que supera un valor límit i trasllada la informació que el cos necessita descansar. Durant l'estat de son, aquest valor decreix. Aquest procés homeostàtic, com d'altres processos biològics de l'organisme, és el factor que ens regula quan tenim la necessitat de dormir. Si no existís, o simplement el valor del procés homeostàtic fos fix, el nostre estat de vigília o de son seria constant en el temps. La majoria de trastorns de son s'originen quan el procés homeostàtic pateix problemes i no regula bé el ritme circadià del nostre cos. Aquest fet el podem observar més endavant quan fem l'estudi del sistema matemàtic que modelitza el comportament de les poblacions de les neurones i com afecta que el procés homeostàtic tingui un valor constant.

A banda del procés homeostàtic, hi ha més factors externs que condicionen els cicles circadians. Aquests factors allarguen els períodes, normalment de vigília i, per conseqüència, els de son, ja que el valor del procés homeostàtic és més gran que normalment. Aquests factors són els més difícils de quantificar i de modelitzar.

S'ha fet servir de referència els models i les explicacions de la publicació científica *Physiologically-based modeling of sleep-wake regulatory networks* [3] de Victoria Booth, Departaments de Matemàtiques i Anestesiologia de la Universitat de Michigan, i Cecilia G. Diniz Behn, Departament de Matemàtica Aplicada i Estadística de la universitat Colorado School of Mines.

En aquest treball, per tal de simplificar el model i l'anàlisi posterior, considerarem una única fase del son sense distingir entre fase REM o NREM.

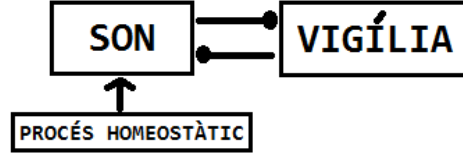


Figura 1: Esquema de l'estructura del model son-vigília

En la figura 1, es representa de manera esquemàtica el model simplificat de les diferents poblacions de neurones i com interactuen entre elles. La fletxa indica excitació i el cercle inhibició. És un resum de la contextualització biològica del model. El següent pas es modelitzar l'esquema i expressar, en llenguatge matemàtic, aquest processos fisiològics.

## 2.2 Variables del model

Les variables del model matemàtic [3] són:

- $f_w$ , és la variable que modelitza l'activitat (mesurada en descàrregues/segon) de la població neuronal promotora de l'estat despert o de vigília. Representa la mitjana de pics, activitat neuronal, de la població en un interval de temps.
- $f_s$ , és la variable que modelitza l'activitat de la població neuronal promotora del son. És equivalent a  $f_w$ . També es mesurada en descàrregues/segon.
- $h$ , és la variable que controla el procés homeostàtic. Augmenta durant l'estat despert i disminueix durant el son. Aquest valor sempre és positiu i està fitat per un màxim i un mínim,  $H_{min}$  i  $H_{max}$ . Per a valors alts,  $h$  activa la població promotora del son mentre que per a valors baixos permet la inhibició d'aquesta població per la promotora de l'estat de vigília.

Les equacions proposades [3] són:

$$\begin{aligned}
 \tau_w \frac{df_w}{dt} + f_w &= S_w(g_{sw}c_s) & c_s &= T_s(f_s), \\
 S_w(c) &= \frac{W_{max}}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{c - \beta_w}{\alpha_w} \right) \right), \\
 \tau_s \frac{df_s}{dt} + f_s &= S_s(g_{ws}c_w) & c_w &= T_w(f_w), \\
 S_s(c, h) &= \frac{S_{max}}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{c - \beta_s(h)}{\alpha_s} \right) \right),
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

on

$$T_y(f) = \tanh \frac{f}{\gamma_y}.$$

Aquestes equacions segueixen la típica forma desenvolupada per Wilson i Cowan [11] on la variació en l'activitat d'una de les poblacions depèn de manera no lineal de la velocitat de l'altra població i altres "inputs" externs. Les constants  $\tau_i$  regulen l'escala de temps de canvi de velocitat de cada població de neurones. Les constants  $g_{ws}$  i  $g_{sw}$  indiquen el pes que té  $f_w$  o  $f_s$  sobre l'altre variable. Aquests valors són determinats de manera experimental. En el cas que s'analitza a continuació, l'experiment s'ha fet amb ratolins, a qui se'ls ha alterat el seu cicle habitual fent-lo molt més ràpid per a l'estudi experimental, i per tant els resultats numèrics que s'obtinguin només seran vàlids per a ratolins en aquest experiment concret.

Els valors de les constants són  $\tau_w = 5s$ ,  $\tau_s = 1s$ ,  $g_{sw} = g_{ws} = -2$ ,  $W_{max} = 6.5Hz$ ,  $S_{max} = 5Hz$ ,  $\beta_w = -0.3$ ,  $\alpha_w = 0.5$ ,  $\alpha_s = 0.25$ ,  $\gamma_w = 5Hz$ ,  $\gamma_s = 4Hz$  i  $\beta_s(h) = -1.5h$ .

Les equacions del procés homeostàtic són:

$$\frac{dh}{dt} := H(f_w, f_s, h) = \begin{cases} \frac{H_{max} - h}{\tau_{hw}} & f_w \geq \theta_w \\ \frac{H_{min} - h}{\tau_{hs}} & f_w < \theta_w \end{cases} \quad (2.2)$$

Notem que, de fet, la funció  $H$  no depèn de la variable  $f_s$ .

Per al procés homeostàtic, les constants prenen valors de  $\tau_{hw} = 600$  seg,  $\tau_{hs} = 700$  seg,  $H_{max} = 1.4$ ,  $H_{min} = -1.6$  i  $\theta_w = 1.5Hz$ . Cal destacar que les escales de temps dels dos grups d'equacions són molt diferents: el sistema homeostàtic és molt més lent en comparació amb el sistema (2.1), fet que ens condicionarà l'estudi posterior.

Integrem de manera numèrica el sistema d'equacions (2.1)-(2.2). Per fer-ho, hem utilitzat la funció *ode45* de Matlab, que es basa en el mètode de Dormand-Price. Aquest mètode pertany a la família de Runge-Kutta d'ordre 4 i 5 [6]. Aquest mètode avalua sis vegades la funció per calcular la solució de quart i cinquè ordre. La diferència entre aquestes aproximacions i el valor real es pren com a l'error de l'aproximació. La tolerància usada es  $10^{-8}$ .

Amb condició inicial  $(f_w(0), f_s(0), h(0)) = (10, 0, 0)$ , la solució numèrica del sistema (2.1)-(2.2) la podem trobar a la figura 2. El comportament (asimptòtic) és periòdic, fet que ho podem considerar lògic ja que el cicle vital alterna l'estat son-vigília de manera contínua. L'estat de vigília correspon a l'interval de temps en què la població  $f_w$  està activa ( $f_w \gg 0$ ) mentre que la població  $f_s$  està inhibida ( $f_s \simeq 0$ ). Anàlogament passa en l'estat de son. Aproximadament, la durada de l'estat de vigília dura 500seg mentre que l'estat de son té una durada d'uns 200seg. La condició inicial de la figura 2 està escollida de manera que podem observar que el sistema tendeix al comportament periòdic sense tenir importància la condició inicial que hem escollit.

Podem observar a la figura 3 que l'activitat d'una població de neurones s'activa o es suprimeix depenent del valor de  $h$ . Si aquest és inferior a aproximadament 0.68949 la població activa és la promotora del estat despert ( $f_w$ ). Quan aquest valor s'assoleix, la població promotora de l'estat de vigília s'inhibeix i la promotora de l'estat de son s'activa. El valor exacte d' $h$  s'estudia en els capítols posteriors. Llavors els

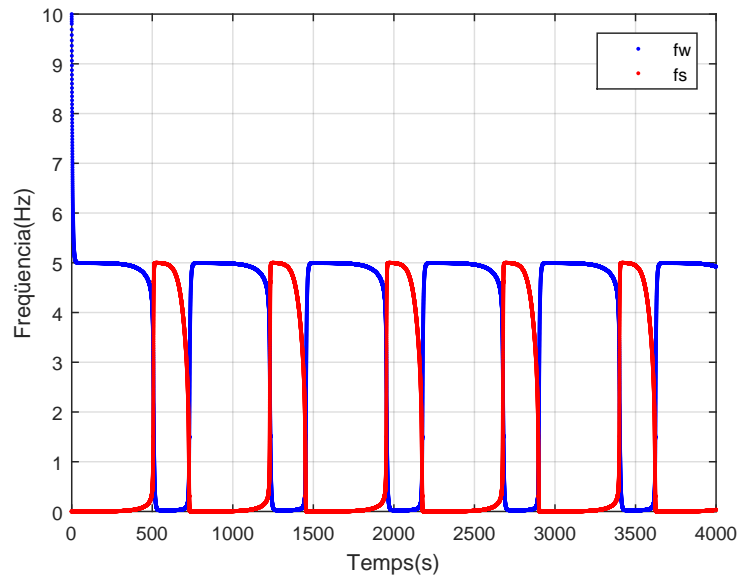


Figura 2: Evolució temporal de les variables  $f_w$  i  $f_s$  del sistema (2.1)-(2.2)

valor de  $h$  decreix fins tenir un valor aproximat de 0.06 i les poblacions de neurones tornen a activar-se o suprimir-se. Podem intuir com la variació de la variable  $h$  es molt més lenta si la comparem amb la  $f_w$ ,  $f_s$ . Les poblacions de neurones, en pocs segons passen de tenir un valor de 0 (suprimir) o 5 (activa), mentre que el canvi que s'aprecia en  $h$  és molt més lent.

Pel que fa a la condició inicial, si variem el valor de  $f_w$  i  $f_s$  però no el d' $h$ , la solució no pateix variacions significatives. Això s'explica perquè la durada del primer cicle només depèn d' $h$  i no de les altres variables. Si comencem amb un valor d' $h$  superior a 0.7, la població activa serà la promotora del son i la inactiva la promotora de l'estat vigília fins que el valor de  $h$  arribi a 0 i s'activin/desactivin les respectives poblacions.

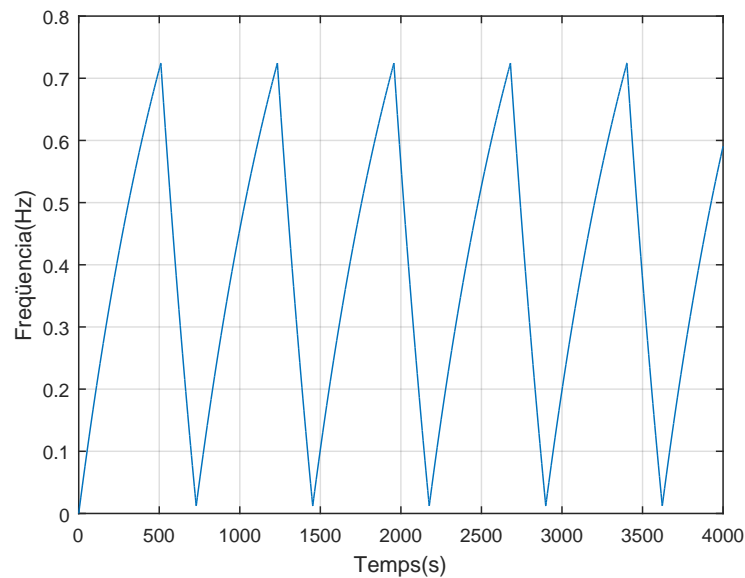


Figura 3: Evolució temporal de la variable  $h$  del sistema (2.1)-(2.2)

## 2.3 Motivació estudi teòric

El model escollit ens permet fer un estudi slow-fast. L'escala de temps de l'equació que descriu la variació d' $h$ , és molt superior a les altres dues equacions. L'escala de temps del procés homeostàtic és de 600 o 700s depenent de quina part de l'equació a trossos s'usi. En canvi, l'escala de temps per a les equacions ràpides es de 5 i 1s respectivament.

Quan tenim un model d'aquestes característiques, la forma habitual d'estudiar-lo és descompondre el sistema en dos subsistemes, un per escales ràpides i un per escales lentes de temps, per poder estudiar la dinàmica global. S'escala el temps de l'equació lenta per un paràmetre molt petit,  $\varepsilon$  i es fa tendir a 0 per tal de poder estudiar només el subsistema ràpid i entendre la dinàmica d'una manera més simple. D'aquesta forma, el valor d' $h$  és constant, passa a ser un paràmetre, i podem dibuixar el diagrama de bifurcació del subsistema ràpid.

Per poder representar aquest diagrama necessitem calcular els punts d'equilibri del nostre sistema d'equacions. Amb aquest punts podem calcular els valors propis que tenen associats per poder diferenciar les diferents regions del diagrama i poder estudiar com influeix en un entorn.

Abans de fer l'estudi numèric i focalitzar-ho en les equacions (2.1)-(2.2) és necessari definir de manera teòrica tots els aspectes claus. Aquests conceptes són els punts d'equilibri i la seva classificació, què és una bifurcació, quins tipus n'existeixen, què és el diagrama de bifurcació i la tècnica numèrica que en permet el càlcul.

Per tant, el treball té dues parts ben diferenciades. A la primera part es defineix i s'explica la base teòrica que posteriorment, en la segona part, s'utilitza per aplicar al model matemàtic descrit en les equacions (2.1)-(2.2).

### 3. Teoria

En aquesta secció es fonamenta de manera teòrica l'estudi del sistema a partir de definicions bàsiques com què són els punts d'equilibri, què és una bifurcació sella-node, un mètode numèric per calcular diagrames de bifurcació i una introducció als sistemes *slow-fast*.

#### 3.1 Punts d'equilibri

Considerem el sistema següent:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$  Un punt d'equilibri,  $(x^*, y^*)$  del sistema 3.1 és aquell que compleix que  $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ , és a dir, que  $f(x^*, y^*) = 0, g(x^*, y^*) = 0$ .

Per trobar aquests punts numèricament, és habitual utilitzar el mètode de Newton-Raphson. Es tracta d'un mètode iteratiu. A partir d'una llavor inicial,  $(x_0, y_0)$ , es calcula el següent punt de la forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - DF(x_0, y_0)^{-1} F(x_0, y_0)$$

on  $F$  és el sistema d'equacions i  $DF$  és la seva matriu Jacobiana.

Sigui  $\varepsilon$  la tolerància a l'error permès. Aleshores, si  $\|F(x_1, y_1)\| < \varepsilon$ , diem que el mètode ha trobat el punt que buscava. En cas contrari ha de continuar iterant fins que la norma del punt calculat sigui tan petita com es desitja.

#### 3.2 Linealització

Una vegada s'ha trobat un punt d'equilibri, el següent pas és estudiar-ne l'estabilitat. Per fer aquest pas, necessitem desenvolupar la tècnica de linealització.

Per començar, considerem els punts  $(x^*, y^*)$  tals que  $f(x^*, y^*) = 0, g(x^*, y^*) = 0$ , és a dir, els punts d'equilibri del sistema que hem calculat abans.

Definim  $u = x - x^*, v = y - y^*$ , com una petita pertorbació sobre els punts fixos. Per estudiar com varia la pertorbació, derivem les dues variables  $u$  i  $v$  respecte el temps.

Comencem per a la primera variable:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{x} \\ &= f(x^* + u, y^* + v) \\ &= f(x^*, y^*) + u \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) + v \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) + \Omega(u^2, v^2, uv) \\ &= u \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) + v \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) + \Omega(u^2, v^2, uv) \end{aligned} \quad (3.2)$$

En aquesta última igualtat hem avaluat l'equació en els punts fixos.  $\Omega$  agrupa els termes d'ordre dos i

superiors. De la mateixa manera, per a la segona variable obtenim que:

$$\dot{v} = u \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} + v \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} + \Omega(u^2, v^2, uv) \quad (3.3)$$

Els termes quadràtics els podem menysprear ja que  $u$  i  $v$  són petits. Per tant, la dinàmica de la nostra pertorbació la podem escriure com:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \Big|_{(x^*, y^*)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Per referir-nos-hi més endavant, aquesta matriu és coneguda com la matriu Jacobiana del sistema, de manera abreujada,  $J$ .

D'aquesta manera hem linealitzat el sistema al voltant del punt d'equilibri i a partir d'aquí podem estudiar la seva dinàmica local i podem determinar com són els punts d'equilibri del sistema.

Per poder classificar els tipus de punts d'equilibri del sistema, hem de calcular els valors propis (VAPs) de la matriu  $J$ . Aquesta classificació es basa en el signe dels VAPs i si són reals o imaginaris [10]:

- Node: quan els dos VAPs són reals del mateix signe. Casos particulars:  
Node estable: els dos VAPs son negatius.  
Node inestable: els dos VAPs son positius.
- Sella: els dos VAPs son reals, un VAP es positiu i l'altre VAP es negatiu
- Focus: Els VAPs són complexos conjugats amb part real no nul·la. Casos particulars:  
Focus estable: els dos VAPs tenen part real negativa.  
Focus inestable: els dos VAPs tenen part real positiva.

### 3.3 Bifurcació sella-node

La teoria de bifurcacions estudia els canvis qualitatius o topològics sobre una família d'equacions que depenen d'un paràmetre. Aquest canvis es produeixen quan, per exemple, els punts d'equilibri del sistema passen a ser punts degenerats [10] (la part real d'almenys un valor propi s'anul·la). En alguns casos, quan això passa, els punts d'equilibri es poden crear o destruir.

En el nostre cas, com veurem més endavant, si tractem  $h$  com a paràmetre i en variem el valor podem estudiar com canvia la dinàmica del sistema. La bifurcació que nosaltres estudiarem a fons es l'anomenada de tipus sella-node. En general, conèixer en quins intervals apareixen punts fixos és important pel funcionament de molts processos científics o productius.

La bifurcació sella-node es produeix quan dos punts d'equilibri, un node i un punt de sella, col·lisionen i desapareixen o neixen segons es miri. Això succeeix quan un valor propi s'anul·la [5].



La *forma normal* de la bifurcació sella-node té com a equació:

$$\dot{x} = r + x^2.$$

S'entén per *forma normal* d'una bifurcació el sistema “més senzill” que exhibeix aquella bifurcació.

Per a  $r < 0$ , la nostra equació té dos punts d'equilibri,  $x_1 = \sqrt{-r}$ ,  $x_2 = -\sqrt{-r}$ . Fent l'anàlisi dels valors propis, com que  $f(x) = r + x^2$  implica que  $f'(x) = 2x$ . Llavors com  $f'(x_1) > 0$  vol dir que  $x_1$  és punt d'equilibri inestable i  $f'(x_2) < 0$  que és un punt d'equilibri estable. Si anem augmentant el valor  $r$ , quan sigui nul, tenim un únic punt fix a  $x = 0$ . Si avaluem,  $f'(x) = 0$  i per tant tenim un punt d'equilibri degenerat.

Per a valors positius del paràmetre, no tenim solució, per tant el sistema no té punts d'equilibri. La figura 4 ens mostra aquesta discussió.

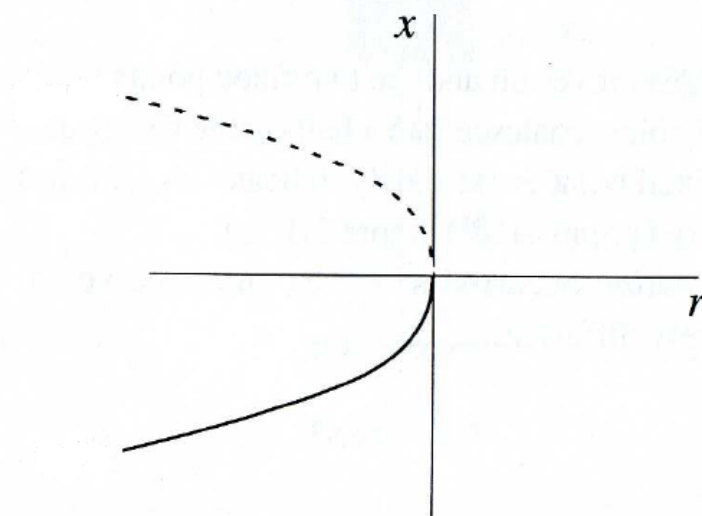


Figura 4: Representació gràfica dels punts d'equilibri respecte del valor del paràmetre  $r$  [10].

Com podem observar, a  $r = 0$ , el dos punts d'equilibri col·lisionen i desapareixen. La branca discontinua correspon als punts d'equilibri inestables i la contínua al estables.

### 3.4 Sistemes slow-fast

El primer pas en estudiar la dinàmica d'un sistema correspon a trobar els punts d'equilibri i saber de quina manera varia el sistema. El segon pas, objectiu d'aquesta secció, és estudiar la velocitat d'aquest canvi respecte a cada variable, si ho fa de manera més ràpida o lenta. Cada variable té associada una escala de temps. Aquesta mesura ens proporciona una unitat de temps raonable per mesurar i quantificar la variació de la variable. És coherent pensar que aquestes escales de temps no han de ser sempre les mateixes.

Un sistema *slow-fast* és conegut com un conjunt d'equacions on alguna de les escales de temps d'algun subconjunt d'equacions es molt més gran que les altres. La manera més senzilla d'estudiar aquest sistema és separar les equacions i estudiar-les en dos grups, un per cada escala de temps [2]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x} = f(x, y, \varepsilon) \\ \frac{dy}{dt} &= \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon) \end{aligned} \quad (3.5)$$

on  $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  i  $\varepsilon$  molt proper a zero. D'aquesta manera la velocitat de les variables  $x$  es molt superior a la de les  $y$  ( $|\dot{x}| \gg |\dot{y}|$ ) en la majoria de punts. L'únic cas on no es compleix la desigualtat és quan la derivada de  $x$  s'anul·la, cas que estudiarem més endavant. Per tant, anomenem variables ràpides a les  $x$  i lentes a les  $y$ . Aquest comportament el tenim en una escala de temps  $t$ , amb unes unitat definides. La velocitat de canvi de  $y$  és tan lenta que no la percebem i sembla que estigui congelada. En aquesta escala de temps només estudiarem la dinàmica de les variables  $x$ .

De manera alternativa, podem fer un canvi en l'escala de temps que ens permeti estudiar les variables lentes. Si fem el canvi de variable  $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$  obtenim les equacions que defineixen el subsistema lent:

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{dx}{d\tau} &= \varepsilon \dot{x} = f(x, y) \\ \frac{dy}{d\tau} &= \dot{y} = g(x, y)\end{aligned}\tag{3.6}$$

En aquesta nova escala de temps, on tot passa més lentament, la velocitat del variable ràpida ha de ser instantània a causa de que el valor  $\varepsilon$  tendeix cap a zero. Per tant, l'única variable de la qual n'estudiarem la dinàmica es la variable lenta.

El cas límit dels sistemes slow-fast és quan  $\varepsilon = 0$ . Llavors les equacions del subsistema lent són:

$$\begin{aligned}0 &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{3.7}$$

L'equació  $f(x, y) = 0$  defineix una varietat coneguda com a varietat lenta o flux lent del sistema general.

Al sistema (3.5), si  $\varepsilon = 0$ , la variable  $y$  és constant i les equacions del subsistema ràpid són:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= 0\end{aligned}\tag{3.8}$$

Descomposar el sistema en dos subsistemes ens aporta pistes de com analitzar a posteriori el sistema complet amb  $\varepsilon > 0$ . L'estratègia és seleccionar les solucions del sistema en segments singulars, depenent de la fase del sistema, utilitzant l'un o l'altre subsistema.

El conjunt de punts definits com

$$C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : f(x, y) = 0\}\tag{3.9}$$

el coneixem com a conjunt crític, *critical manifold* en anglès. El conjunt  $C_0$  és clau en l'estudi de la dinàmica del sistema slow-fast ja que coincideix amb els punts d'equilibri del subsistema ràpid. A la vegada, el conjunt crític defineix una trajectòria pel subsistema lent.

Per tant, quan  $\dot{x} > 0$ , es compleix que la  $\text{vel}(x) = \dot{x} \gg \text{vel}(y) = \dot{y}$  i per tant per estudiar la dinàmica del sistema només ho farem per a la variable  $x$ , ja que la variació de la variable lenta no la precisem respecte la ràpida, dit d'una manera menys rigorosa, "lluny" de la corba  $C_0$ , la influència de la variable lenta és menyspreable i podem aproximar les trajectòries del sistema complet només amb les equacions (3.8).

Podem suposar que la trajectòria del nostre sistema complet és similar a la figura 5, aquesta figura està representada en dues dimensions suposant que tant les variables  $x$  com  $y$  tenen una dimensió cada una. Com que aquesta trajectòria ha estat aproximada pel subsistema ràpid, ens podem restringir només

a l'eix de la variable ràpida ja que la lenta es invariant,  $\dot{x} = F(x)$ . Per cada valor de  $y$ , lluny de la corba, fem el tall del subsistema ràpid que podem estudiar de manera més senzilla, ja que només depèn de la variable ràpida. D'aquesta manera podem trobar els punts d'equilibri, classificar-los i deduir la dinàmica que representem amb les fletxes de la figura 6. Si fem més talls a la figura (cúbica) podem representar la dinàmica corresponent al tall i aproximar la trajectòria, fora de la corba  $f(x, y)$ .

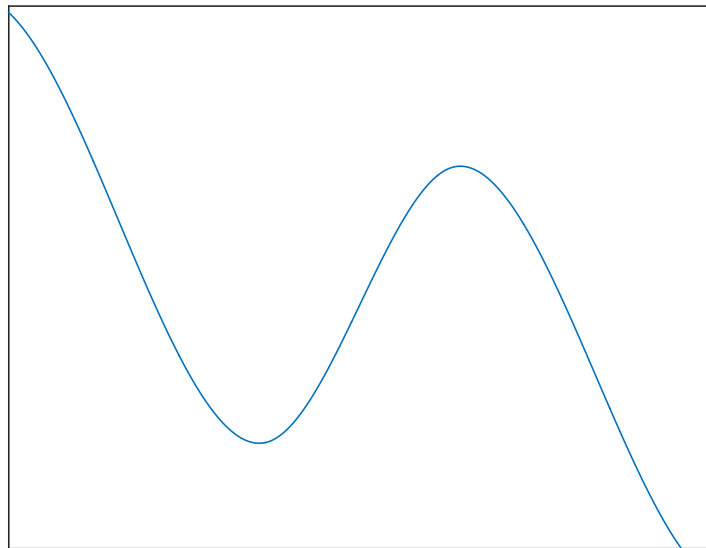


Figura 5: Representació d'una funció en "forma de Z".

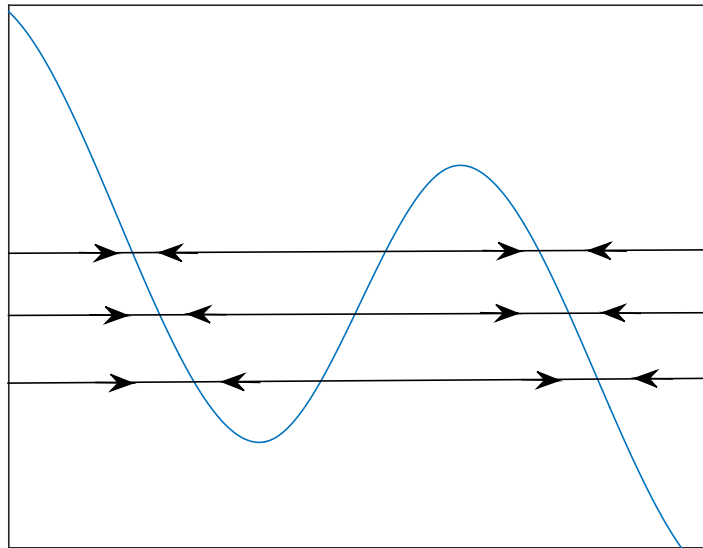


Figura 6: Superposició de la dinàmica del subsistema ràpid sobre la figura 5.

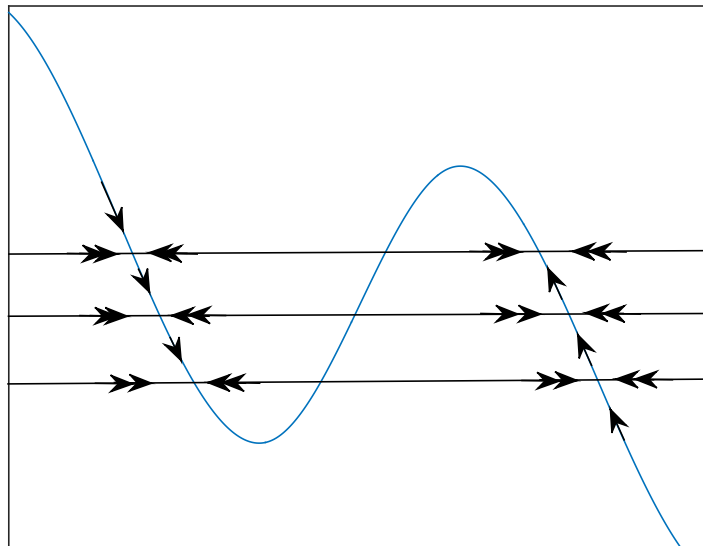


Figura 7: Superposició de la dinàmica del subsistema lent sobre la figura 6.

Quin és el problema si ens restringim a la corba? La dinàmica sobre aquesta corba és desconeguda i l'haurèm d'estudiar de manera aïllada. Com ja sabem, aquesta corba està definida pel conjunt crític que estudia la dinàmica del subsistema lent (3.7).

Podem seccionar la corba en 3 branques ben diferenciades. Anomenem  $C_1$  la branca de l'esquerra,  $C_2$  la central i  $C_3$  la de la dreta. Per a la branca  $C_1$  podem escriure  $x = h(y)$  i per tant,  $\dot{y} = g(h(y), y) = G(y)$ . D'igual manera que per la funció  $F$ , podem estudiar la dinàmica de  $G$ . En la figura 5 podem deduir que la derivada és sempre negativa en tota la branca  $C_1$ . En canvi, si comencem per la branca  $C_3$ , potser la derivada és sempre creixent. Aquestes suposicions són producte de com hem representat la figura 5. Amb altres formes, amb altres equacions aquest estudi es fa de la mateixa manera, tot i que pots ser més complicat intuir la dinàmica de les branques. En la figura 7 podem observar la corba amb les dinàmiques del subsistema ràpid i lent. Hem representat amb una doble fletxa la dinàmica que pertany al subsistema ràpid precisament perquè la variació de les variables  $x$  es més ràpida que la de la variable  $y$ .

La branca  $C_2$  és la central. En aquests punts la dinàmica és repulsora. Als extrems de la branca se'ls coneix pel nom de punt de plec. En aquests extrems és on es crea o es destrueixen els punts fixos per al subsistema ràpid quan tractem la variable lenta com un paràmetre i per tant és on es produeix la bifurcació sella-node. A la secció 4 es tractarà de manera més extensa, de manera teòrica i numèrica el comportament en aquest punts de plec i a tota la corba en general.

Aquesta introducció teòrica només és vàlida per a  $\varepsilon = 0$ . Per al cas on  $\varepsilon > 0$ , l'estudi ha de realitzar-se de manera molt particular, sense poder generalitzar en cap moment, tractant a cada sistema d'equacions de manera única. A la secció 4 es tracta d'un d'aquest casos particular ja que ho aplica al sistema d'equacions que modelitzen els períodes vigília-son, on hi ha dues variables ràpides i una de lenta. Aquests casos particulars també són coneguts com a casos persistents.

### 3.5 Mètode d'extrems condicionats

Aquest mètode numèric és utilitzat per calcular el diagrama de bifurcació. Per tal que una funció implícita pugui representar una corba, si  $f(x, y) = 0$ , on  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-1}$ . En el nostre cas això es compleix quan tractem a  $x = (f_w, f_s)$  i  $y = h$ . Al subsistema ràpid, el paràmetre  $h$  l'hem convertit en una constant, però en aquest mètode numèric el tornem a convertir en variable per tal que el valor de  $h$  es pugui modificar i es ressegueixi el diagrama de bifurcació. Amb el mètode de Newton això no es pot fer ja que fixa el valor de  $h$ .

Sigui  $\mathcal{G} = 0$  un sistema de  $n$  equacions i  $n + 1$  incògnites que defineixen una corba a l'espai  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Sigui  $w^*$  una solució aproximada del sistema i per tant  $\|\mathcal{G}(w^*)\|_2$  té valor petit, on  $\|\cdot\|_2$  és l'euclidiana. Aleshores,

$$w = w^* + \Delta w \Rightarrow \mathcal{G}(w^* + \Delta w) = \mathcal{G}(w^*) + D\mathcal{G}(w^*)\Delta w + O(\|\Delta w\|^2) \quad (3.10)$$

Per tant, hem de resoldre:

$$D\mathcal{G}(w^*)\Delta w + \mathcal{G}(w^*) = 0$$

amb  $n + 1$  variables

i  $n$  equacions

Triarem la solució amb  $\|\Delta w\|_2$  mínim.

### Mètode d'extrems condicionats

Denotem  $A = D\mathcal{G}(w^*)$ ,  $b = \mathcal{G}(w^*)$ , i  $p = \Delta w$ . Volem que  $Ap + b = 0$ , on  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Volem que  $(p^T p)$  sigui mínim. Com a única condició, el  $\text{rang}(A) = n$ .

Utilitzant el Mètode dels Multiplicadors de Lagrange [1] tenim que,

$$\mathcal{L} = p^T p + \mu^T (Ap + b) \quad (3.11)$$

i per tant, derivant 3.11

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} = 0 \Leftrightarrow 2p^T + \mu^T A = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = 0 \Leftrightarrow Ap + b = 0 \quad (3.13)$$

A partir de l'equació 3.12,

$$\begin{aligned} p &= -\frac{1}{2}A^T \mu \Rightarrow \\ Ap &= -\frac{1}{2}AA^T \mu, \text{ fent servir 3.13} \Rightarrow \\ -b &= -\frac{1}{2}AA^T \mu \Rightarrow \\ 2b &= AA^T \mu, AA^T \text{ és invertible} \Rightarrow \\ \mu &= 2(AA^T)^{-1}b, \text{ substituint al primer pas} \Rightarrow \\ p &= -A^T(AA^T)^{-1}b \end{aligned}$$

Identifiquem  $p$  com l'increment del valor de  $w$  de l'equació 3.10 i llavors  $w = w^* + p$ . Iterem aquest passos fins que  $\|\mathcal{G}(w)\| < \text{tol}$ .

Una vegada hem trobat el refinament, hem d'iterar el mètode per trobar el següent punt i poder recórrer la corba pas a pas. Ens mourem utilitzant la tangent, calculant una nova llavor i refinant el punt seguint el mètode dels Multiplicador de Lagrange.

Hem de tenir en consideració alguns ajustos. És possible que s'hagi de fer un ajust al pas. Si en cinc iteracions no s'ha trobat la solució a partir de la llavor, haurem de reduir el pas i tornar a començar des de la llavor anterior.

## 4. Discussió slow-fast

En el nostre sistema de 3 equacions les escales de temps són molt diferents. Per a les  $\tau_{hs}, \tau_{hw}$  de (2.2), els valors són de 700 i 600 segons respectivament, mentre que a les equacions de (2.1) són de 1 i 5 segons. Quan això succeeix, podem descompondre el sistema en un subsistema ràpid i un subsistema lent. Per a nosaltres, el procés homeostàtic descrit per la variable  $h$  en les equacions (2.2) és la variable lenta i les variables que modulen l'activitat neuronal corresponen a les variables ràpides, descrites en (2.1).

### 4.1 Cas límit $\varepsilon = 0$

#### 4.1.1 Subsistema ràpid

Les equacions del subsistema ràpid son:

$$\begin{aligned}\dot{f}_s &= F(f_w, f_s, h) \\ \dot{f}_w &= G(f_w, f_s, h) \\ \dot{h} &= 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

el que implica que tractem l' $h$  com a paràmetre.

#### 4.1.2 Dinàmica del subsistema ràpid

Com hem comentat a la secció 3, el primer que hem de fer per estudiar la dinàmica és trobar els punts d'equilibri. El nostre sistema, (4.1), té dues variables,  $f_w, f_s$  i un paràmetre,  $h$ . Això implica que per a cada valor de  $h$ , els punts d'equilibri variaran i tindran nous valors.

Si integrem el subsistema ràpid com hem fet abans amb el sistema (2.1)-(2.2), hem de donar valors al paràmetre  $h$ . Si no hi hagués canvi en el valor del procés homeostàtic mai hi hauria canvi d'estat. Les següents gràfiques simulen aquesta situació hipotètica:

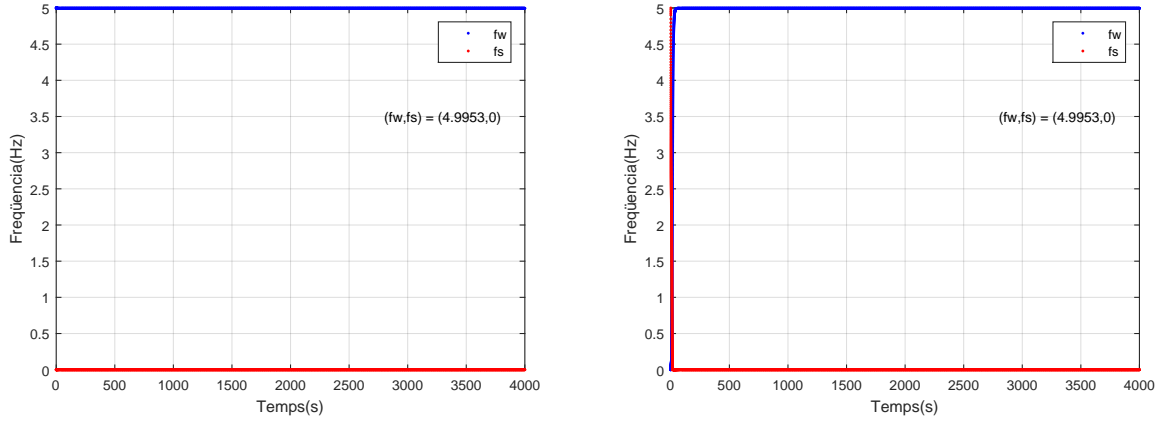


Figura 8:  $H = 0.01$ , punt equilibri (4.9963,0)

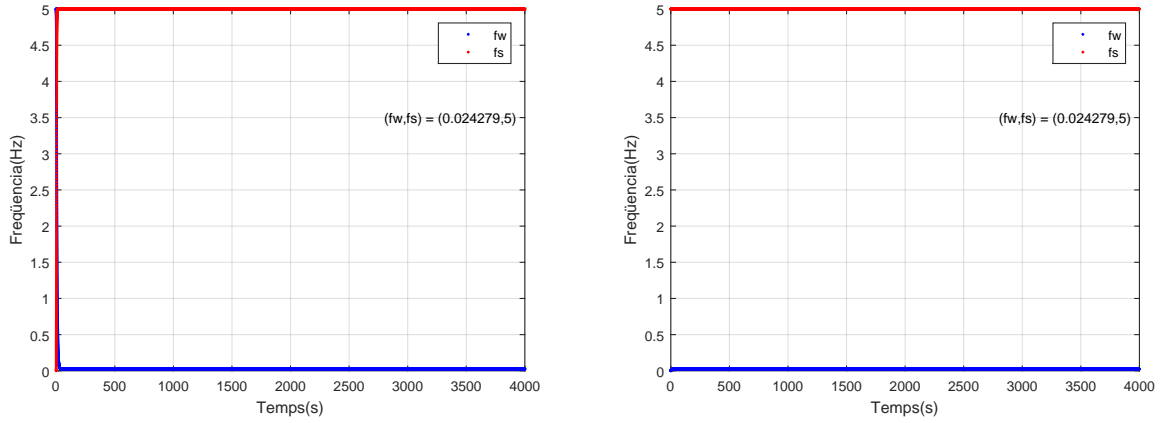


Figura 9:  $h = 0.9$ , punt equilibri (0.024279,5)

En les dues gràfiques de l'esquerra de les figures 8 i 9, la condició inicial per integrar-les es el punt  $(f_w, f_s) = (5, 0)$ , mentre que en les gràfiques de la dreta es  $(f_w, f_s) = (0, 5)$ .

Com podem observar, les variables  $f_w$  i  $f_s$  assoleixen un valor estacionari. Per diferents condicions inicials les variables tendeixen cap un mateix valor concret. Aquest fet ens indica que molt possiblement sigui l'únic punt d'equilibri estable del nostre sistema per al valor de  $h$  concret que s'ha escollit.

Per a valors intermitjos de  $h$  aquestes premisses ja no es compleixen. Depenent de les condicions inicials per a  $f_w$  i  $f_s$ , la solució tendeix cap a dos valors diferents. Per tant, la hipòtesi que tenim es que existeixen diversos punts d'equilibri estable depenent del valor de l'indicador homeostàtic.

En les dues gràfiques de la figura 8, el sistema tendeix a l'estat de vigília de manera indefinida, quan el valor de  $h$  és molt petit. En canvi les figures de 9 tendeixen cap a l'estat adormit quan el valor de  $h$  és molt més gran.

Per intentar comprovar aquestes hipòtesis, dibuixarem les isoclines del subsistema ràpid. Una isoclina de la variable  $x$  es defineix com el conjunt de punts  $I_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \dot{x} = f(x, y) = k\}$ . Si representem les dues isoclines corresponents a les equacions (4.3), quan  $k = 0$ , els punts de tall corresponents són els punts d'equilibri del subsistema ràpid ja que són les mateixes equacions que pel conjunt crític.



La figura 10 mostra un recull d'algunes d'aquestes isoclines per a diferents valors de  $h$ .

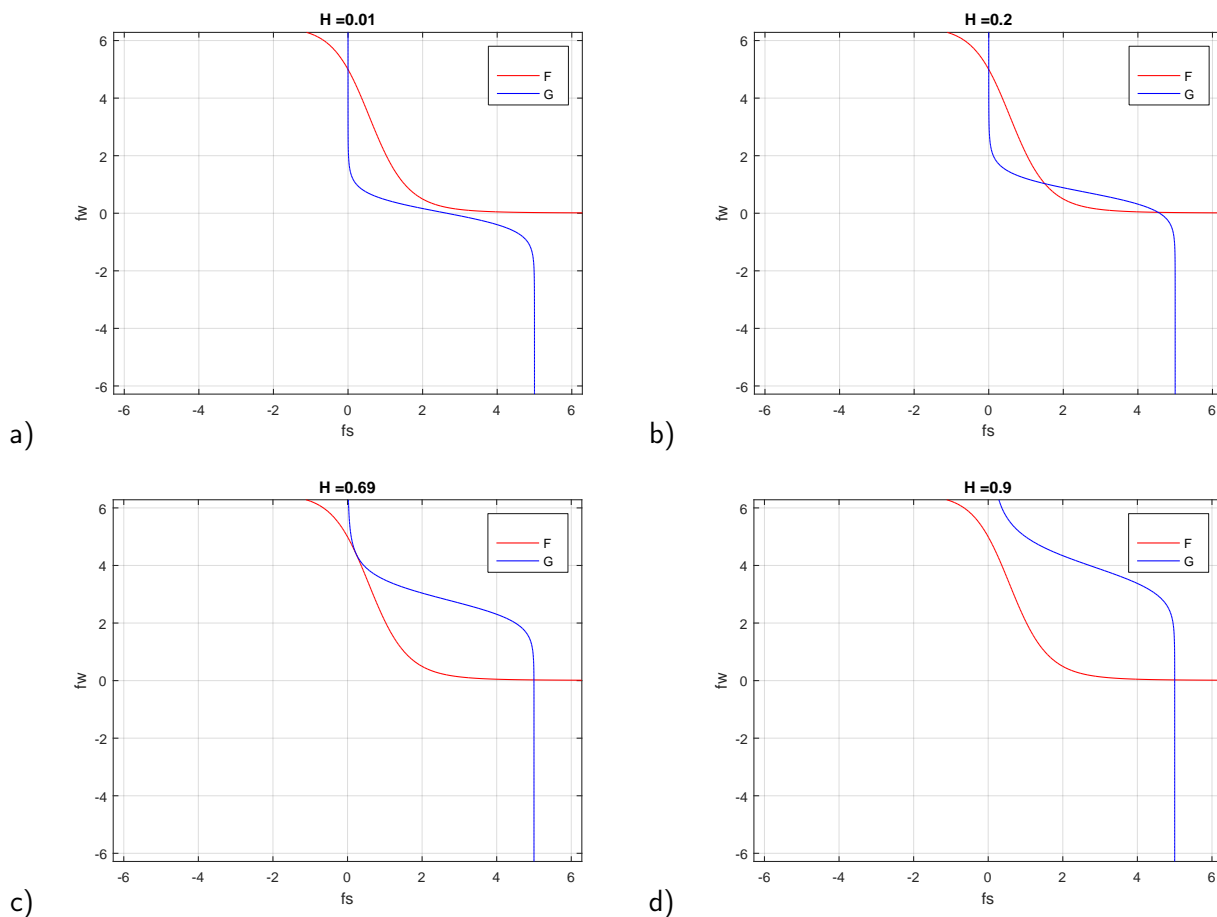


Figura 10: Isoclines del subsistema ràpid

Com podem veure a la figura 10a), per a un valor molt petit de  $h$ , les isoclines només es tallen en un punt. Quan el valor de  $h$  augmenta (Fig 10b), les dues isoclines es tallen en 3 punts, és a dir, es creen 2 punts d'equilibri nous. Quan continua augmentant el valor de  $h$ , dos punts d'equilibri col·lisionen (Fig 10d) i el sistema només té un punt d'equilibri. Tenim dues bifurcacions. Per a dibuixar el diagrama de bifurcació del subsistema ràpid, farem servir el que coneixem com a *mètode d'extrems condicionats*, explicat a la secció 3.5.

En particular, el sistema a resoldre té 3 variables,  $f_w$ ,  $f_s$  i  $h$ , i 2 equacions que són les del subsistema ràpid (4.1). Hem convertit el valor constant  $h$  en variable per a que puguem dibuixar el diagrama de bifurcació. Aquestes condicions ens defineixen la corba que volem calcular. Per fer-ho utilitzarem el mètode descrit a la secció 3.5 amb condició inicial  $(f_w, f_s, h) = (5, 0, 0)$ . El pas utilitzat serà 0.1. La figura 11 correspon a la representació gràfica del diagrama de bifurcació.

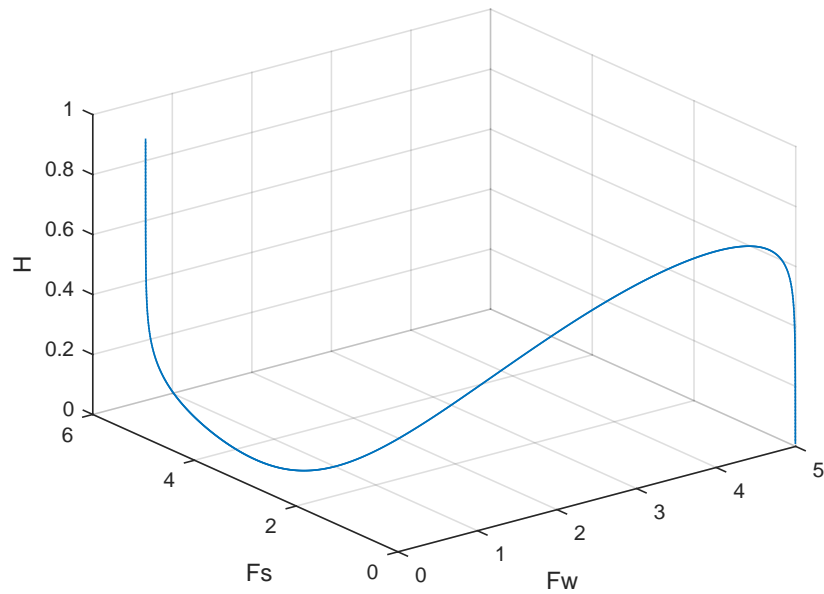


Figura 11: Diagrama de bifurcació.

Les projeccions de la corba sobre els plans  $f_w - h$  i  $f_s - h$  són respectivament la figura 12 i la figura 13. En aquestes figures podem observar com varien els punts d'equilibri que hem trobat amb el mètode d'Extrems Condicionats.

La figura 12 mostra una corba en forma de Z. Podem diferenciar una part superior que anomenarem branca  $C_1$ , una part diagonal, branca  $C_2$ , i una part inferior, branca  $C_3$ . Els punts on canvia la direcció de la corba s'anomenen punts de plec. Podem veure com en la nostra figura tenim dos punts de plec que separen la figura en tres branques. Aquest punts de plec corresponen a les bifurcacions de tipus sella-node, i són exactament els punts on un dels dos valors propis val 0. Per tant, en aquests punts, no coneixem l'estabilitat del punt d'equilibri només amb una anàlisi lineal.

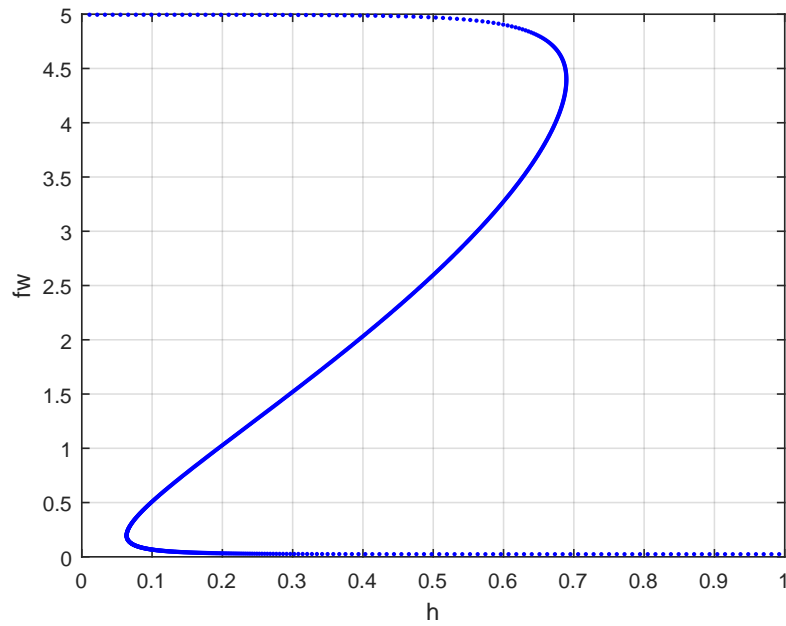


Figura 12: Projectió  $f_w - h$

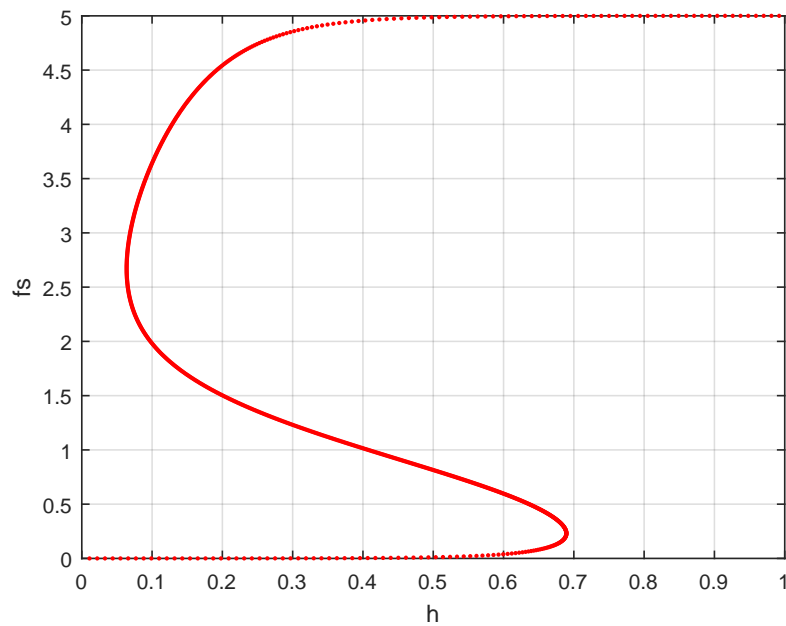


Figura 13: Projectió  $f_s - h$

Per saber de quina naturalesa són els punts d'equilibri que formen el diagrama de bifurcació (llevat dels punts de plec) hem d'avaluar els punts en la matriu Jacobiana del subsistema ràpid i trobar-ne els valors propis. Recordem que aquesta matriu té dimensions  $2 \times 2$  ja que tenim dues equacions i dues incògnites, la  $h$  és un paràmetre.

La figura 14 mostra el càlcul dels valors propis per als punts d'equilibri obtinguts a partir de les iteracions del mètode numèric. Per tant, l'eix horitzontal correspon a les iteracions del mètode d'Extrems Condicionats mentre que l'eix vertical correspon al valor numèric del valor propi de cada punt d'equilibri. Quan fem una interacció del mètode d'Extrems Condicionats, el mètode de Newton utilitza la matriu Jacobiana per trobar el punts de la corba. És aquesta última matriu del mètode de Newton la que ens dona la informació dels valors propis ja que està avaluada en el punt de la corba que elegim. Amb el signe dels valors propis podem classificar el tipus de punt d'equilibri. Hem afegit el valor del paràmetre  $h$  com a informació complementària. Com podem veure, la gràfica la podem separar en tres parts, la primera per quan els dos valors propis tenen signes negatius, la segona amb signe contrari i la tercera, de nou, amb signes negatius. El valor de  $h$  proporciona informació molt rellevant. Com que el valor inicial de  $h$  és  $h = 0$ , aquest valor ha de créixer ja que la població activa és la promotora de la vigília. Aquest valor va augmentant fins que en un moment determinat comença a decreixer. Aquest punt coincideix amb el canvi de signe d'un dels valors propis i curiosament quan torna a canviar de signe, el valor de  $h$  torna a créixer.

És fàcil relacionar els tres segments de la figura 14 amb les tres branques de la corba de la figura 12. Les dues branques amb signe negatiu corresponen a nodes atractors, mentre que la branca central correspon a punts de tipus sella. Cal destacar l'existència dels dos punts de plec que apareixen quan un dels valors propis s'anul·la. Al punt que separa  $C_1$  i  $C_2$  l'anomenem  $p$ , i al que separa les branques  $C_2$  i  $C_3$  l'anomenem  $q$ . Per tant, els valors propis de  $C_1$  són els que apareixen a l'esquerra del punt  $p$ , els de la branca  $C_2$  són els que es troben entre els punts  $p$  i  $q$  i els punts que estan a la dreta del punt  $q$  són els corresponents a la branca  $C_3$ .

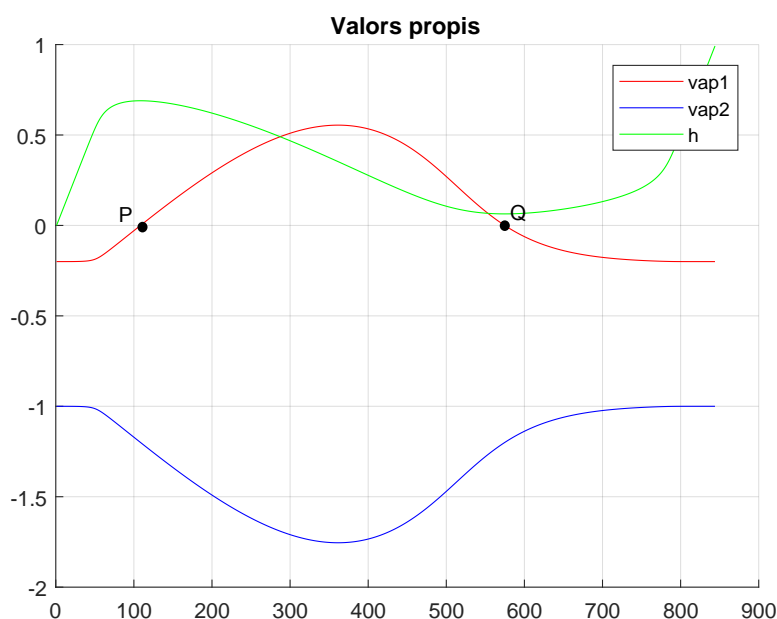


Figura 14: Valors propis dels punts d'equilibri del diagrama de bifurcació segons l'iteració del mètode numèric

#### 4.1.3 Dinàmica en els punts de plec

Els punts de plec tenen la característica que un dels valors propis és zero, pel que no els podem classificar amb els criteris descrits a la secció 3.2.

Sabem que la direcció que determina el vector propi de valor propi negatiu, és tangent a la varietat estable del punt. Per tal de determinar la dinàmica sobre la varietat central, ho farem a partir d'un estudi numèric. Recordem que la direcció que determina el vector propi de valor propi zero és tangent a la varietat central. Per fer això definim els punts  $p_1$  i  $p_2$  com  $p_1 = p + \varepsilon * v_p$  i  $p_2 = p - \varepsilon * v_p$ , on  $v_p$  es el vector propi amb valor propi 0. L'estratègia a seguir és calcular la trajectòria d'aquests dos punts i comprovar si tendeixen al punt d'equilibri  $p$  o se n'allunyen.

També integrarem la trajectòria de dos punts propers al punt  $p$  sobre la varietat estable. Sabem que aquests punts es mouran cap al punt de plec  $p$  ja que el valor propi associat és negatiu. Per poder visualitzar aquesta varietat, integrarem cap endarrera.

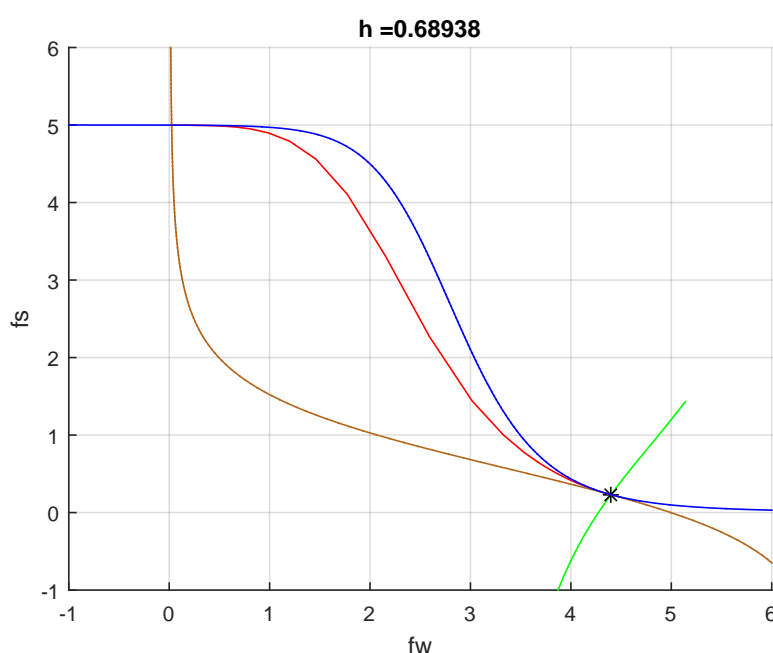


Figura 15: Dinàmica al l'entorn del punt de plec  $p$

La figura 15 representa el diagrama descrit. L'asterisc correspon al punt de plec. De color blau i marró podem apreciar les isoclínies corresponents al valor de  $h$  concret. El color verd representa la varietat estable, tangent al vector propi de valor propi negatiu. L'altra varietat, tangent al vector propi de valor propi nul, està representada en color vermell. Com podem observar només es veu una línia que acaba al punt de plec.

La figura 16 ens mostra una ampliació de la figura prop del punt de plec, il·lustrant com es mouen el punts propers al punt de plec. Com podem comprovar, observant les línies de color vermell i blau, per una banda es mou cap al punt de plec i per l'altre s'escapa.

Tornant a la figura 15, la corba de vermell aproximen el mateix punt on es tallen les isoclínies, es a dir, on hi ha un punt d'equilibri. L'únic punt d'equilibri per  $h = 0.68938$ , diferent de  $p$ , és el pertanyent a  $C_3$ . Per tant podem considerar que una vegada estem aprop del punt de plec  $p$ , sobre la corba  $C_1$ , podem empalmar-ho amb el punt, amb mateixa coordenada  $h$ , de la branca  $C_3$ .

De manera similar, definint i fent la mateixa integració numèrica pel punt de plec  $q$  podem intuir com s'enganxen les branques  $C_3$  amb la  $C_1$  en aquesta direcció, del punt  $q$  cap al punt de  $C_1$  amb la mateixa

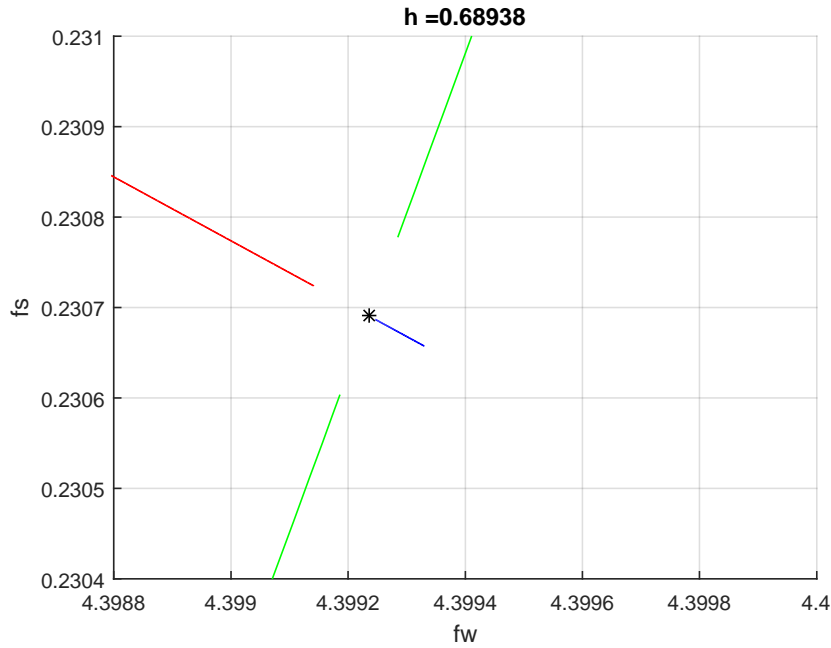


Figura 16: Ampliació de la figura 15 al voltant del punt p

coordenada  $h$ . Aquests càlculs es mostren a la figura 17. La figura 18 mostra una ampliació al voltant del punt  $q$ , il·lustrant com es mouen els punts propers al punt de plec. Com podem comprovar, observant les línies de color vermell i blau, per una banda es mou cap al punt de plec i per l'altra s'escapa. Passa el mateix que al punt de plec  $p$ , la diferència principal es que la varietat central va de  $C_3$  cap a  $C_1$  i no a l'inversa com passa a l'entorn del punt  $p$ . Podem observar com el color blau sobrepassa el punt  $q$ . Això es degut a un petit error en l'integració numèrica del Matlab. De totes maneres podem visualitzar la direcció en la que es mou la dinàmica en l'entorn del punt  $q$ .

#### 4.1.4 Subsystema lent

Ara que ens hem fet una idea de la dinàmica ràpida del sistema d'equacions (2.1)-(2.2), hem d'estudiar la dinàmica de la part lenta. Recordem, que fem un canvi d'escala de temps,  $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$  i obtenim

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{df_w}{d\tau} &= \varepsilon \dot{f}_w = F(f_w, f_s, h) \\ \varepsilon \frac{df_s}{d\tau} &= \varepsilon \dot{f}_s = G(f_w, f_s, h) \\ \dot{h} &= H(f_w, f_s, h) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Com que  $\varepsilon = 0$ , llavors només ens reduïm a la tercera equació del sistema (2.1)-(2.2) amb les restriccions  $F(f_w, f_s, h) = G(f_w, f_s, h) = 0$  que defineixen el conjunt crític.

Aquesta equació és lineal i podem calcular la durada dels períodes de vigília i de son analíticament. Definim  $H^0$  i  $H^1$  com els valors de  $h$  en els punts de plec, que són els punts  $p$  i  $q$  de la secció 4.1.2. Una de les particularitats d'aquests dos punts és que són exactament on es produeixen la bifurcació sella-node. En el cas de  $H^0$ , és on es produeix la creació dels tres punts fixos. Si fem una secció de la gràfica 12 en un valor més gran a  $H^0$ , aquesta talla la corba en els tres punts fixos. En el cas de  $H^1$  és on col·lisionen dos

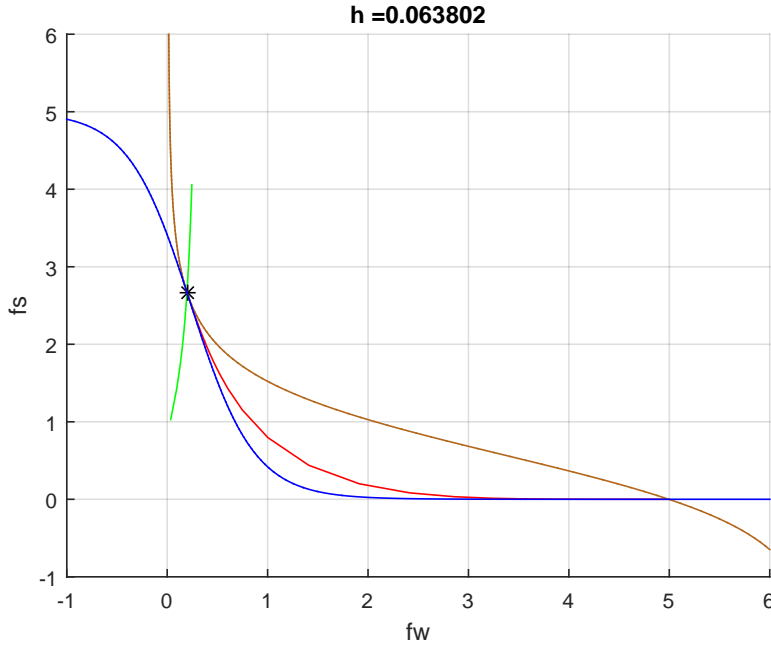


Figura 17: Dinàmica al l'entorn del punt de plec q

punts fixos i a partir d'aquest valor només hi ha un punt fix. Com hem estudiat anteriorment, això passa quan un dels valors propis és igual a 0 i per tant és una condició per trobar els punts de plec.

Les altres dues condicions són que  $F = G = 0$ . Per tant el sistema a resoldre és:

$$\begin{aligned} F(f_w, f_s, h) &= 0 \\ G(f_w, f_s, h) &= 0 \\ \det(D\mathcal{F}(f_w, f_s, h)) &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Resolent aquest sistema hem calculat els punts de plec que son  $p = (f_w^0, f_s^0, h^0) = (0.1966, 2.6706, 0.0638)$  i  $q = (f_w^1, f_s^1, h^1) = (4.3992, 0.2307, 0.6894)$ , pel que  $h^0 = 0.0638$  i  $h^1 = 0.6894$ .

Per calcular aquest punts s'ha fet servir la funció `fsolve` de Matlab. Aquesta funció troba zeros de funcions per a pràcticament totes les funcions implícites.

La part superior de la figura 12 correspon al període de vigília ja que el valor de  $f_w$  es proper a 5. En canvi la branca inferior correspon al període de son, ja que el valor de  $f_w$  es proper a 0. De manera equivalent es pot raonar si observem la figura 13 i relacionem el valor de  $f_s$  amb el valor de  $h$ .

Si integrem l'equació (2.2) quan  $fw > \theta_w$  (el sistema es troba en l'estat vigília) entre els punts  $H^0$  i  $H^1$  obtenim la durada de l'estat de vigília. Aquesta integració la podem fer de manera analítica. L'equació és:

$$\begin{aligned} \dot{h} &= \frac{H_{max} - h}{\tau_w} \\ h(0) &= H^0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

on l'objectiu és calcular el valor de  $T_w$  tal que  $h(T_w) = H^1$ .

Per tant,

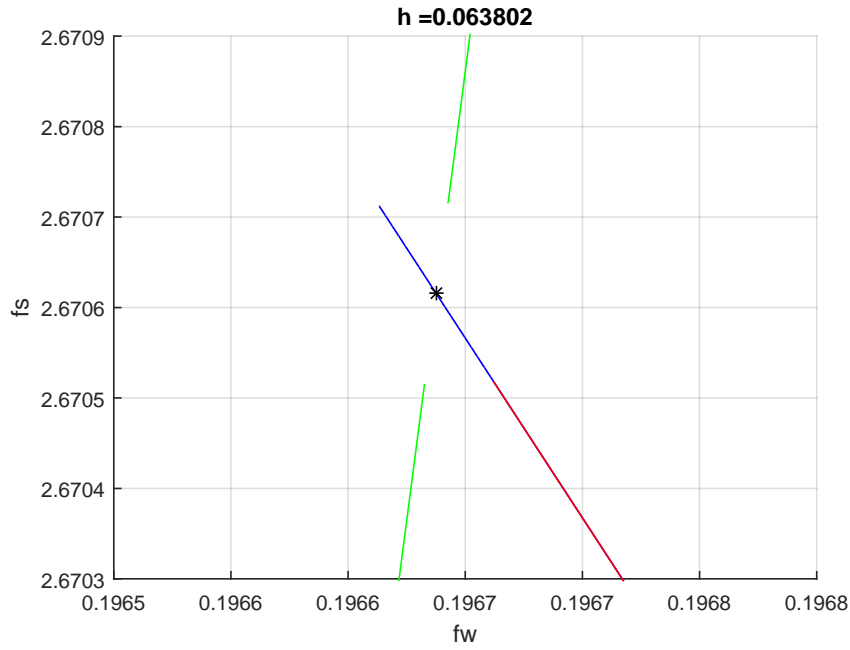


Figura 18: Ampliació de la figura 17 al voltant del punt q

$$\dot{h} = \frac{dh}{dt} = \frac{H_{max} - h}{\tau_w} \Rightarrow$$

$$\frac{dh}{H_{max} - h} = \frac{dt}{\tau_w} \Rightarrow$$

$$\int_{H^0}^{h(t)} \frac{dh}{H_{max} - h} = \int_0^t \frac{dt}{\tau_w} \Rightarrow$$

$$-\ln(H_{max} - h) \Big|_{H^0}^{h(t)} = \frac{t}{\tau_w} \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{H_{max} - h(t)}{H_{max} - H^0}\right) = -\frac{t}{\tau_w} \Rightarrow$$

$$h(t) = H_{max} - (H_{max} - H^0)\exp\left(-\frac{t}{\tau_w}\right)$$

Per tant, imposant que  $h(T_w) = H^1$  i aïllant  $T_w$  obtenim  $T_w = 378.8707$  segons.

De manera anàloga podem fer el mateix per a la durada del període de son que anomenarem  $T_s$ . La diferència es que hem d'integrar de  $H^1$  cap a  $H^0$  i que la funció a integrar es la que correspon a l'estat de son ( $f_w < \theta_w$ ). Així, obtenim la funció

$$h(t) = H_{min} - (-H_{min} + H^1)\exp\left(-\frac{t}{\tau_s}\right).$$



I imposant que  $h(T_s) = H^0$ , llavors  $T_s = 223.4242$  segons.

L'estat de son es correspon amb la branca  $C_3$  del diagrama de bifurcació. Ho sabem ja que els valors de  $f_s$  son alts i el de  $h$  també. Com hem començat a la part de la dreta de la branca i el temps en recórrer-la cap al punt de plec es positiu, ens indica que sobre aquesta corba el moviment es cap a l'esquerra. En canvi, en la branca superior el moviment es contrari i es cap a la dreta.

#### 4.1.5 Límit singular: òrbita periòdica de relaxació

L'estudi de les tres seccions anteriors en permet afirmar que el nostre sistema (2.1)-(2.2), en el cas límit on  $\varepsilon = 0$ , permet construir una òrbita periòdica.

Com hem vist a la secció 4.1.2, els punts d'equilibri del subsistema ràpid dibuixen una forma de Z. Aquesta figura la podem separar en 3 branques, on la superior i inferior anomenades  $C_1$  i  $C_3$  respectivament, són estables ja que els valors propis d'aquest punts d'equilibri són negatius.

En la secció 4.1.4 hem pogut comprovar com a la branca  $C_1$  el moviment es sempre cap al punt de plec  $p$ , amb el valor de  $h$  creixent. A la branca  $C_3$  el moviment és en sentit contrari, sempre cap al punt de plec  $q$ , amb el valor de  $h$  decreixent.

A la secció 4.1.3 hem mostrat de manera numèrica que al punt de plec  $p$  la dinàmica ens empeny cap a l'altra branca. En canvi, per al punt  $q$ , la dinàmica ens porta cap a la branca  $C_1$ .

De manera resumida, si tenim una condició inicial prop de  $C_1$ , aquest es mourà cap al punt de plec  $p$ , de manera molt ràpida anirà cap a la branca  $q$ , la recorrerà fins arribar al punt de plec  $q$  on tornarà a moure cap a  $C_1$  formant una òrbita periòdica. Així, hem construït un cicle tancat (una òrbita periòdica) que alterna dinàmica ràpida i dinàmica lenta.

Si ens fixem en la interpretació biològica d'aquest cicle veurem que es correspon al cicle de son-vigília del ratolí. En l'estat de vigília el valor  $f_w$  és proper a 5 ja que la població de neurones promotora de l'estat despert està activa. Per contra, el valor de  $f_s$  es proper a 0 ja que la població de neurones promotora del son està inhibida. Al començament de l'estat despert el valor de  $h$  és proper a 0. A mesura que avança el temps, el valor de  $h$  va augmentant. Aquest període correspon a l'evolució al llarg de la branca  $C_1$ . La transició de l'estat vigília al de son es produeix quan s'arriba al punt de plec i aquesta és pràcticament instantània. Durant el període de son, la població que està activa és la promotora del son i per tant té sentit que el valor de  $f_s$  sigui proper al màxim i el de  $f_w$  sigui pràcticament nul. En aquest moment el valor de  $h$  va decreixent a llarg de la branca  $C_3$  fins que s'arriba al punt de plec i es torna a l'estat despert. Aquesta transició també és instantània.

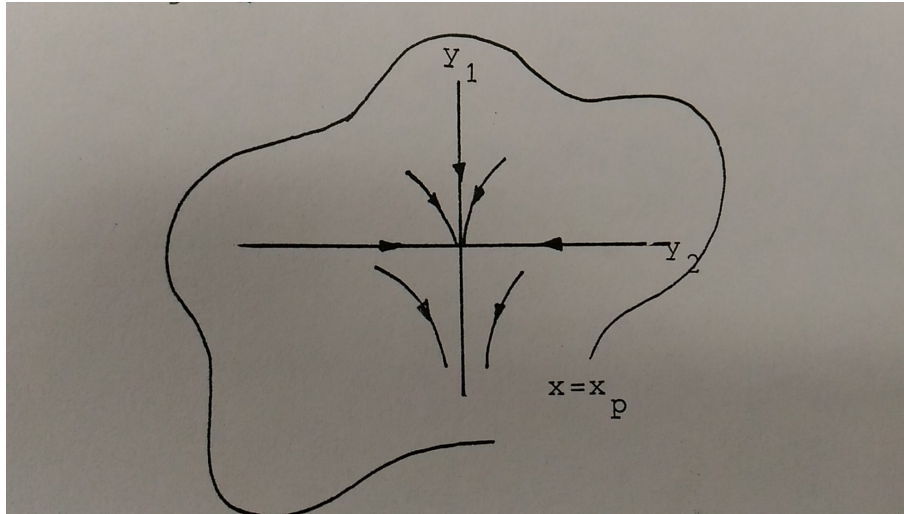


Figura 19: Dinàmica local necessària per la hipòtesi H3.

## 4.2 Cas $\varepsilon > 0$

Una vegada hem estudiat el cas límit, considerarem el cas  $\varepsilon > 0$ , i veurem que existeix una òrbita periòdica propera a la que hem construït pel cas  $\varepsilon = 0$ . Malauradament, no existeix un teorema general que ens permeti assegurar la persistència dels objectes existents per  $\varepsilon = 0$  per a tots els sistemes slow-fast quan  $\varepsilon > 0$ . Per a cada cas s'ha de tractar d'una manera concreta. En cas que els valors propis associats no s'anul·lin, el teorema de Fenichel [7] ens garanteix que els objectes persisteixen. Així, aplicant aquest resultat, tenim que els trams de l'òrbita periòdica singular trobada a la secció 4.1.5 persisteixen. No obstant, el teorema falla als punts  $p$  i  $q$ , ja que la matriu Jacobiana esdevé degenerada. Per veure que, malgrat aquest degeneració, els trams anteriors "s'enganxen" a través de nous punts "plec" quan  $\varepsilon > 0$ , ens basarem en el resultat del doctor Carles Bonet (UPC) publicat en la seva tesi *Pertorbació singular d'òrbites periòdiques de relaxació* [4], per a poder demostrar la persistència d'aquesta òrbita periòdica.

En aquest resultat es demostra que si un sistema slow-fast amb una variable lenta i dues ràpides compleix tres hipòtesis concretes existirà una òrbita periòdica de relaxació quan el valor de  $\varepsilon$  sigui positiu, propera a l'òrbita periòdica per al cas límit.

En concret, per poder estudiar com es comporta el sistema definit per les equacions (2.1)-(2.2), necessitem comprovar si es compleixen les hipòtesis que descrivim esquemàticament a continuació:

- H1 La varietat lenta és una corba en forma de Z i la dinàmica sobre les branques superior i inferior de la varietat lenta és en la direcció dels punts de plec.
- H2 Les branques superior i inferior són atractores.
- H3 En un entorn dels punts de plec, la dinàmica local és la descrita a la figura 19.

Per demostrar aquestes 3 hipòtesis farem servir els resultats de la secció 4.1.

#### 4.2.1 Hipòtesi 1

La varietat lenta descrita té per equacions:

$$\begin{aligned} F(f_w, f_s, h) &= 0 \\ G(f_w, f_s, h) &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

A la figura 11 podem veure que clarament té forma de Z. Existeixen  $V_1, V_3$  oberts de  $\mathbb{R}$  i funcions  $\phi_1$  i  $\phi_3$  sobre  $\mathbb{R}^2$  tals que podem definir les branques superior i inferior de la figura 11:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(\phi_1(h), h) \in \mathbb{R}^3, h \in V_1\} \\ C_3 &= \{(\phi_3(h), h) \in \mathbb{R}^3, h \in V_3\} \end{aligned}$$

El sistema 4.5 restringit a  $C_1$  té les equacions:

$$\dot{h} = H(\phi_1(h), h) \quad (4.6)$$

on la funció  $H$  és la corresponent a les equacions del procés homeostàtic i té per equació la definida a (2.2) per  $f_w > \theta_w$ . Com que estem restringint el sistema a la varietat lenta a  $C_1$ , la primera equació de (4.6) correspon a:

$$\dot{h} = \frac{H_{max} - h}{\tau_{hw}} \quad (4.7)$$

La derivada  $\dot{h}$  sempre és positiva ja que  $h$  es mou entre  $H_{max}$  i  $H_{min}$ . Per tant el valor de  $h$  és creixent i podem concloure que sobre la branca  $C_1$ , els punts es mouen cap al punt de plec  $p$  ja que és el punt amb la coordenada  $h$  més gran.

De la mateixa manera, ara ens restringim a la branca  $C_3$ . Les equacions són:

$$\dot{h} = \frac{H_{min} - h}{\tau_{hs}} \quad (4.8)$$

Fent el mateix raonament que per a la branca  $C_1$ , el valor de  $\dot{h}$  és negatiu i per tant el moviment dels punts que pertanyen a d'aquesta branca va cap al punt de plec  $q$  ja que és el punt amb la coordenada  $h$  més gran.

Per tant, a les branques  $C_1$  i  $C_3$ , els punts es mouen cap als respectius punts de plec.

#### 4.2.2 Hipòtesi 2

Les equacions del subsistema ràpid són:

$$\begin{aligned} \dot{f}_s &= F(f_w, f_s, h) \\ \dot{f}_w &= G(f_w, f_s, h) \end{aligned} \quad (4.9)$$

on aquí  $h$  és un paràmetre. Els valors propis dels punts d'equilibri es troben a la figura 14. Podem observar que tant per la branca  $C_1$  com per la branca  $C_3$ , els valors propis són sempre negatius. En els punts  $p$  i  $q$  d'aquest mateixa figura, un dels dos valors propis es fa 0 i per tant no podem classificar de quina manera és la dinàmica mitjançant la part lineal del sistema. La hipòtesi 3 ho estudia.

### 4.2.3 Hipòtesi 3

Hem d'estudiar el caràcter del sistema ràpid prop dels punts de plec. Més concretament, hem d'estudiar la dinàmica del sistema ràpid al llarg de les direccions corresponents als vectors de valor propi nul. Al punt de plec  $p = (f_{wp}, f_{sp})$  tenim que els valors propis són  $\lambda_1 = 0$  i  $\lambda_2 < 0$ . El valor propi 0 té el vector  $(v_p^x, v_p^y)$  com a propi. El teorema de la varietat central ens assegura l'existència d'una funció  $\phi(f_s)$  definida en un entorn de  $p$  tal que:

- $\phi(f_{sp}) = f_{wp}$ , és a dir, conté el punt  $p$ .
- $\dot{\phi}(f_{sp}) = \frac{v_p^y}{v_p^x}$
- $f_w = \phi(f_s)$ , és una varietat invariant del sistema ràpid:

$$\dot{f}_w = F(f_w, f_s, h_p)$$

$$\dot{f}_s = G(f_w, f_s, h_p)$$

$$h = h_p \text{ (constant)}.$$

Idealment, per tal d'estudiar la dinàmica del sistema en les direccions del vector propi  $(v_p^x, v_p^y)$  (equivalentment amb el punt  $q$ ), es fa el que s'anomena reducció a la varietat central, que consisteix en trobar la solució al llarg de la varietat  $\phi$  desenvolupada en sèrie de potències. No obstant, en aquest treball, ens limitarem a comprovar aquest hipòtesi numèricament.

Tal com s'ha vist numèricament a la secció 4.1.3, la dinàmica sobre aquesta varietat (vegi's figura 15) que és com l'esquematitzada en la figura 19.

Anàlogament es pot veure que el punt  $q$  compleix la hipòtesi.

D'aquesta manera es validen les tres hipòtesis i podem assegurar que existeix una òrbita periòdica de relaxació per al sistema complet quan  $\varepsilon > 0$ . Aquesta òrbita la podem dibuixar si aprofitem la simulació numèrica feta a la secció 2. A la figura 20 podem observar-la. L'òrbita és molt similar a les branques  $C_1$  i  $C_3$ , i podem veure com prop dels punts de plec, l'òrbita salta de l'entorn d'una branca cap a l'altra.

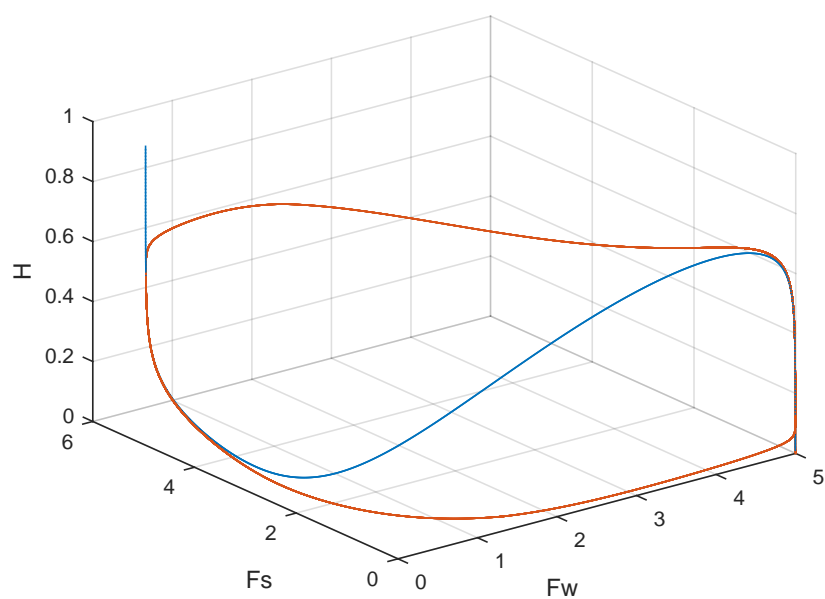


Figura 20: Varietat lenta (blau) amb el cicle límit calculat numèricament (vermell)

## 5. Conclusions

Les persones som éssers amb moltes i variades inquietuds, amb un gran esperit de descobrir com es comporta la natura i poder entendre el perquè d'aquests fets. Les matemàtiques són una eina important per intentar explicar-ho i aprofundir en el coneixement, descobrir nous escenaris científics i proposar solucions als problemes existents.

En la biologia i la medicina la investigació científica, i per tant la matemàtica, és molt notòria. L'objectiu és explicar els comportaments de molts fenòmens mitjançant la modelització matemàtica i comparar els resultats obtinguts amb les dades experimentals.

En aquest treball, hem pogut estudiar el cicle límit que presentava el model. Per encarar l'estudi hem realitzat una simulació numèrica del model on ja podíem veure que el model tendeix a un cicle. El pas següent ha estat dibuixar el diagrama de bifurcació per tal de poder començar a fer la discussió *slow-fast*. Hem comprovat com les branques superior i inferior són atractores. El càlcul clau ha estat l'estudi de la dinàmica als punts de plec i, en particular, sobre la varietat central. Usant els resultats de la tesi del Dr. Carles Bonet, hem pogut assegurar que existeix aquesta òrbita o cicle límit per al cas  $\varepsilon > 0$ .

Aquest treball m'ha servit per conèixer els sistemes *slow-fast*. Penso que a partir d'aquest treball es pot continuar aprenent i estudiant aquest tipus de sistemes. La comprovació de la hipòtesis 3 de la secció 4.2.3 es pot fer, alternativament, de manera analítica, sense fer servir la integració numèrica. Es tracta d'aproximar la dinàmica sobre la varietat central per aquest model en concret i comprovar les hipòtesis.

També, com a futur treball, seria molt interessant poder adaptar el model per a éssers humans, podent canviar les constants del model i poder calcular els temps de son i vigília. A partir d'aquestes dades es podria variar alguna de les constants per tractar de conèixer com reacciona el model i per tant els humans en la realitat biològica. D'aquesta manera podem refinar el model per a futurs estudis.

## Referències

- [1] E.L. Allgower and K. Georg. *Introduction to Numerical Continuation Methods*, volume 45 of *Classics in Applied Mathematics*. SIAM, 2003.
- [2] N.Berglund, B.Gentz (2006) *Deterministic Slow-Fast Systems*
- [3] V. Booth, C. G- Diniz Behn. *Physiological-base modeling of sleep-wake regulatory networks*, 2013.
- [4] C. Bonet. *Pertorbació singular d'òrbites periòdiques de relaxació*, Tesis Doctoral, 1984.
- [5] J.D. Crawford *Introduction to bifurcation theory* Reviews of Modern Physics, vol 64, No 4, 1991.
- [6] J.R. Dormand, P.J Prince. *A family of embedded Runge-Kutta formulae*, 1980.
- [7] N. Fenichel *Asymptotic stability with rate conditions*, Indiana Univ. Math. J.: 23, 1109–1137, 1973.
- [8] R. Gleit, C-G Diniz Behn, V. Booth. *Modelling inter-individual differences in spontaneous internal desynchrony patterns*, 2013.
- [9] C. B Saper, Thomas E. Scammell, Jun Lu. *Hypothalamic regulation of sleep and circadian rhythms*, 2005.
- [10] S.H. Strogatz *Nonlinear dynamics and chaos*, part II, 1985.
- [11] H.R. Wilson, J.D. Cowan. *Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons*, 1972.

# Annex

Codis realitzats en Matlab per a la representacions de figures a la memòria.

## Figures 2 i 3

### DEFintNum.m

```
1 t = [0:5:4000];
2
3 opt = odeset('RelTol',1e-8,'AbsTol',[1e-8,1e-8,1e-8]);
4 [T,Y] = ode45(@sistema,[0 4000],[10,0,0],opt);
5
6 figure(1)
7 p = plot(T,Y(:,1),'b.',T,Y(:,2),'r.')
8 xlabel('Temps(s)')
9 ylabel('Frecuencia(Hz)')
10 grid on
11 legend('fw','fs')
12 set(gcf,'PaperUnits','centimeters');
13 set(gcf,'papersize',[15 11])
14 set(gcf,'paperposition',[0 0 15 11]);
15
16 print('-dpdf','SolNumFG')
17 figure(2)
18 plot(T,Y(:,3))
19 xlabel('Temps(s)')
20 ylabel('Frecuencia(Hz)')
21 grid on
22 set(gcf,'PaperUnits','centimeters');
23 set(gcf,'papersize',[15 11])
24 set(gcf,'paperposition',[0 0 15 11]);
25 print('-dpdf','SolNumH')
```

### DEFsisIntNum.m

```
1 function dy = sistema(t,y)
2 twh = 700;
3 tsh = 600;
4 tw = 5;
5 ts = 1;
6 Hmin = -1.6;
7 Hmax = 1.4;
8 gsw = -2;
9 gws = -2;
10 Wmax = 6.5;
11 bw = -0.3;
12 aw = 0.5;
```



```

13 Smax = 5;
14 as = 0.25;
15 ys = 4;
16 yw = 5;
17 dy = zeros(3,1);
18
19 %dy = (dfw,dfs,dH) y = (fw,fs,H)
20
21 dy(1) = (1/tw)*(-y(1)+((Wmax/2)*(1+tanh((gsw*tanh(y(2)/ys)-bw)/aw))));
22 dy(2) = (1/ts)*(-y(2)+((Smax/2)*(1+tanh((gws*tanh(y(1)/yw) +
    1.5*y(3))/as))));
23 dy(3) = ((Hmax-y(3))/twh)*heaviside(y(1) - 1.5) + ((Hmin -
    y(3))/tsh)*heaviside(1.5 - y(1));
24 end

```

## Figures 8 i 9

### DEF\_Hparametre.m

```

1 t = [0:5:4000];
2 opt = odeset('RelTol',1e-8,'AbsTol',[1e-8,1e-8]);
3
4 %sistema
5
6 H = 0.01;
7
8 [T,Y] = ode45(@(t,y)sistHparam(t,y,H),[0 4000],[5,0],opt);
9
10 figure(1)
11
12 plot(T,Y(:,1),'b.',T,Y(:,2),'r.')
13 strpf = ['(fw,fs) = ', '(' ,num2str(Y(end,1)) , ',5) '];
14 text(2800,3.5,strpf);
15 grid on
16 xlabel('Temps(s)')
17 ylabel('Frecencia(Hz)')
18 legend('fw','fs')
19 set(gcf,'PaperUnits','centimeters');
20 set(gcf,'papersize',[15 11])
21 set(gcf,'paperposition',[0 0 15 11]);
22 print('-dpdf','SolNumH-0,01a')
23
24 [T,Y] = ode45(@(t,y)sistHparam(t,y,H),[0 4000],[0,5],opt);
25
26 figure(2)
27
28 plot(T,Y(:,1),'b.',T,Y(:,2),'r.')
29 strpf = ['(fw,fs) = ', '(' ,num2str(Y(end,1)) , ',5) '];
30 text(2800,3.5,strpf);

```

```

31 grid on
32 xlabel('Temps(s)')
33 ylabel('Frequencia(Hz)')
34 legend('fw','fs')
35 set(gcf,'PaperUnits','centimeters');
36 set(gcf,'papersize',[15 11])
37 set(gcf,'paperposition',[0 0 15 11]);
38 print('-dpdf','SolNumH-0,01b')
39
40 %sistema
41 H = 0.9;
42
43 [T,Y] = ode45(@(t,y)sistHparam(t,y,H),[0 4000], [5,0],opt);
44
45 figure(3)
46
47 plot(T,Y(:,1),'b.',T,Y(:,2),'r.')
48 strpf = ['(fw,fs) = ', '(' , num2str(Y(end,1)), ',5)'];
49 text(2800,3.5,strpf);
50 grid on
51 xlabel('Temps(s)')
52 ylabel('Frequencia(Hz)')
53 legend('fw','fs')
54 set(gcf,'PaperUnits','centimeters');
55 set(gcf,'papersize',[15 11])
56 set(gcf,'paperposition',[0 0 15 11]);
57 print('-dpdf','SolNumH-0,9a')
58
59 [T,Y] = ode45(@(t,y)sistHparam(t,y,H),[0 4000], [0,5],opt);
60
61 figure(4)
62
63 plot(T,Y(:,1),'b.',T,Y(:,2),'r.')
64 strpf = ['(fw,fs) = ', '(' , num2str(Y(end,1)), ',5)'];
65 text(2800,3.5,strpf);
66 grid on
67 xlabel('Temps(s)')
68 ylabel('Frequencia(Hz)')
69 legend('fw','fs')
70 set(gcf,'PaperUnits','centimeters');
71 set(gcf,'papersize',[15 11])
72 set(gcf,'paperposition',[0 0 15 11]);
73 print('-dpdf','SolNumH-0,9b')

```

#### DEF\_sistHparam.m

```

1 function dy = sistHparam(t,y,H)
2 tw = 5;
3 ts = 1;
4 gsw = -2;
5 gws = -2;

```

```

6 Wmax = 6.5;
7 bw = -0.3;
8 aw = 0.5;
9 Smax = 5;
10 as = 0.25;
11 ys = 4;
12 yw = 5;
13 dy = zeros(2,1);
14 %dy = (dfw,dfs,dH) y = (fw,fs,H)
15 dy(1) = (1/tw)*(-y(1)+((Wmax/2)*(1+tanh((gsw*tanh(y(2)/ys)-bw)/aw)))));
16 dy(2) = (1/ts)*(-y(2)+((Smax/2)*(1+tanh((gws*tanh(y(1)/yw) + 1.5*H)/as)))));
17 end

```

**Figura 10**

DEFdiag\_bif\_Isoclina.m

```

1 clear all; clc;
2
3 fs=0;
4 fw=5;
5 Fw = [];
6 Fs = [];
7 y= [fw,fs];
8 for i = 0:0.01:1
9     r = 1;
10    H=i;
11    %Newton
12    while r >= (1/2)*10^(-8)
13        dy = J(y,H)\-fun(y,H);
14        z = y + dy';
15        r = abs(fun(z,H));
16        y=z;
17    end
18    Fw = [Fw, y(1)];
19    Fs = [Fs, y(2)];
20    figure(1)
21    plot(y(2),y(1),'white');
22    hold on
23    h1 = ezplot(@(fs,fw) F(fw,fs,H));
24    h2 = ezplot(@(fs,fw) G(fw,fs,H));
25    set(h1,'Color','red');
26    set(h2,'Color','blue');
27    xlabel('fs')
28    ylabel('fw')
29    title(strcat('H = ',num2str(H)))
30    legend('','F','G')
31    grid on
32    set(gcf,'PaperUnits','centimeters');

```

```

33     set(gcf,'papersize',[15 11])
34     set(gcf,'paperposition',[0 0 15 11]);
35     print('-dpdf',strcat('Isoclines',num2str(H*100),'.pdf'))
36     hold off
37 end

```

#### DEF\_fun\_Iso.m

```

1 function dy = fun(y,H)
2 tw = 5;
3 ts = 1;
4 gsw = -2;
5 gws = -2;
6 Wmax = 6.5;
7 bw = -0.3;
8 aw = 0.5;
9 Smax = 5;
10 as = 0.25;
11 ys = 4;
12 yw = 5;
13 dy = zeros(2,1);
14 %dy = (dfw,dfs,dH) y = (fw,fs,H)
15 dy(1) = (1/tw)*(-y(1)+((Wmax/2)*(1+tanh((gsw*tanh(y(2)/ys)-bw)/aw))));
16 dy(2) = (1/ts)*(-y(2)+((Smax/2)*(1+tanh((gws*tanh(y(1)/yw) + 1.5*H)/as))));
17 end

```

#### DEF\_J\_Iso.m

```

1 function [M] = J(y,H);
2 M = zeros(2,2);
3 tw = 5;
4 ts = 1;
5 gsw = -2;
6 gws = -2;
7 Wmax = 6.5;
8 bw = -0.3;
9 aw = 0.5;
10 Smax = 5;
11 as = 0.25;
12 ys = 4;
13 yw = 5;
14 M(1,1) = -1/tw;
15 M(2,2) = -1/ts;
16
17 fs=y(1);
18 fw=y(2);
19 M(1,2) =
    (1/2)*Wmax*gsw*(1-tanh(fw/ys)^2)*(1-tanh((gsw*tanh(fw/ys)-bw)/aw)^2)/(tw*ys*aw);
20 M(2,1)=(1/2)*Smax*gws*(1-tanh(fs/yw)^2)*(1-tanh((gws*tanh(fs/yw)+1.5*H)/as)^2)/(ts*yw*
21

```

22 `end`

#### DEF\_F\_Iso.m

```

1  function F=F(fw,fs,H)
2
3  tw = 5;
4  ts = 1;
5  gsw = -2;
6  gws = -2;
7  Wmax = 6.5;
8  bw = -0.3;
9  aw = 0.5;
10 Smax = 5;
11 as = 0.25;
12 ys = 4;
13 yw = 5;
14
15 F=(1/tw)*(-fw+((Wmax/2)*(1+tanh((gsw*tanh(fs/ys)-bw)/aw))));
16 end

```

#### DEF\_G\_Iso.m

```

1  function G=G(fw,fs,H)
2
3  tw = 5;
4  ts = 1;
5  gsw = -2;
6  gws = -2;
7  Wmax = 6.5;
8  bw = -0.3;
9  aw = 0.5;
10 Smax = 5;
11 as = 0.25;
12 ys = 4;
13 yw = 5;
14
15 G= (1/ts)*(-fs+((Smax/2)*(1+tanh((gws*tanh(fw/yw) + 1.5*H)/as))));
16 end

```

## Figura 11 i 19

#### DEF\_3D.m

```

1  clear all; clc;
2

```

```

3 %Condicions inicials
4 fs=0;
5 fw=5;
6 h = 0;
7 Fw = [fw];
8 Fs = [fs];
9 H = [];
10 w= [fw,fs,h]';
11 pas = 0.01;
12 Z = [];
13 I = [];
14 cont = 1;
15 while w(3) < 1
16     cand = w;
17     it = 0;
18     while norm(fEC(cand)) > (1/2)*10^(-8) && it < 10 %per si itera moltes
19         vegades que s'aturi
20         %metode extrems condicionats
21         A=JNova(cand);
22         b=fEC(cand);
23         p = -(A')*inv(A*A')*b;
24         cand = cand + p;
25         it = it + 1;
26     end
27     if it < 10
28         w = cand;
29         Fw(cont) = w(1);
30         Fs(cont) = w(2);
31         H(cont) = w(3);
32         A = JNova(w);
33         z = null(A);
34         B = A(1:2,1:2);
35         if z(1) > 0
36             z = -z;
37         end
38         w = w + 1.1*pas*z;
39     else
40         A = JNova(w);
41         z = null(A);
42         B = A(1:2,1:2);
43         if z(1) > 0
44             z = -z;
45         end
46         w = w + 0.9*pas*z;
47     end
48     cont = cont + 1;
49 end
50 view(3);
51 hold on
52 plot3(Fw(2:end),Fs(2:end),H(2:end))
53 ylabel('Fs')

```

```

54 xlabel('Fw')
55 zlabel('H')
56 hold off
57 grid on
58 set(gcf,'PaperUnits','centimeters');
59 set(gcf,'papersize',[15 11])
60 set(gcf,'paperposition',[0 0 15 11]);
61 print('-dpdf','3D.pdf')
62
63 %Amb ta real
64
65 opt = odeset('RelTol',1e-8,'AbsTol',[1e-8,1e-8,1e-8]);
66 [T,Y] = ode45(@sistema,[0 4000],[5,0,0],opt);
67
68
69 view(3);
70 hold on
71 plot3(Fw(2:end),Fs(2:end),H(2:end))
72 plot3(Y(:,1),Y(:,2),Y(:,3))
73 ylabel('Fs')
74 xlabel('Fw')
75 zlabel('H')
76 hold off
77 grid on
78 set(gcf,'PaperUnits','centimeters');
79 set(gcf,'papersize',[15 11])
80 set(gcf,'paperposition',[0 0 15 11]);
81 print('-dpdf','3DwithOrb.pdf')

```

#### DEF\_fEC.m

```

1 function dy = fEC(y)
2 tw = 5;
3 ts = 1;
4 gsw = -2;
5 gws = -2;
6 Wmax = 6.5;
7 bw = -0.3;
8 aw = 0.5;
9 Smax = 5;
10 as = 0.25;
11 ys = 4;
12 yw = 5;
13 dy = zeros(2,1);
14 dy(1) = (1/tw)*(-y(1)+((Wmax/2)*(1+tanh((gsw*tanh(y(2)/ys)-bw)/aw))));
15 dy(2) = (1/ts)*(-y(2)+((Smax/2)*(1+tanh((gws*tanh(y(1)/yw) +
16 end

```

### DEF\_JNova.m

```

1 function [M] = JNova(y);
2 M = zeros(2,3);
3 tw = 5;
4 ts = 1;
5 gsw = -2;
6 gws = -2;
7 Wmax = 6.5;
8 bw = -0.3;
9 aw = 0.5;
10 Smax = 5;
11 as = 0.25;
12 ys = 4;
13 yw = 5;
14 fw=y(1);
15 fs=y(2);
16 H = y(3);
17 M(1,1) = -1/tw;
18 M(1,2) =
    (1/2)*Wmax*gsw*(1-(tanh(fs/ys))^2)*(1-(tanh((gsw*tanh(fs/ys)-bw)/aw))^2)/(tw*ys*aw)
19 M(2,1)=(1/2)*Smax*gws*(1-(tanh(fw/yw))^2)*(1-tanh(((gws*tanh(fw/yw)+1.5*H)/as))^2)/(ts
20 M(2,2) = -1/ts;
21 M(1,3) = 0;
22 M(2,3) =(0.5)*Smax*1.5*(1-(tanh((gws*tanh(fw/yw)+1.5*H)/as))^2)/(as*ts);
23 end

```

### DEF\_sistema\_3D.m

```

1 function dy = sistema(t,y)
2 twh = 700;
3 tsh = 600;
4 tw = 5;
5 ts = 1;
6 Hmin = -1.6;
7 Hmax = 1.4;
8 gsw = -2;
9 gws = -2;
10 Wmax = 6.5;
11 bw = -0.3;
12 aw = 0.5;
13 Smax = 5;
14 as = 0.25;
15 ys = 4;
16 yw = 5;
17 dy = zeros(3,1);
18 %dy = (dfw,dfs,dH) y = (fw,fs,H)
19 dy(1) = (1/tw)*(-y(1)+((Wmax/2)*(1+tanh((gsw*tanh(y(2)/ys)-bw)/aw)))));
20 dy(2) = (1/ts)*(-y(2)+((Smax/2)*(1+tanh((gws*tanh(y(1)/yw) +
    1.5*y(3))/as)))));
21 dy(3) = ((Hmax-y(3))/twh)*heaviside(y(1) - 1.5) + ((Hmin -

```



```

22     y(3))/tsh)*heaviside(1.5 - y(1));
end

```

## Figura 12 i 13

### DEF\_proj3D.m

```

1  clear all; clc;
2
3  %Condicions inicials
4  fs=0;
5  fw=5;
6  h = 0;
7  Fw = [fw];
8  Fs = [fs];
9  H = [];
10 w= [fw,fs,h]';
11 pas = 0.01;
12 Z = [];
13 I = [];
14 cont = 1;
15 while w(3) < 1
16     cand = w;
17     it = 0;
18     while norm(fEC(cand)) > (1/2)*10^(-8) && it < 10 %per si itera moltes
19         vegades que s'aturi
20         %metode extrems condicionats
21         A=JNova(cand);
22         b=fEC(cand);
23         p = -(A')*inv(A*A')*b;
24         cand = cand + p;
25         it = it + 1;
26     end
27     if it < 10
28         w = cand;
29         Fw(cont) = w(1);
30         Fs(cont) = w(2);
31         H(cont) = w(3);
32         A = JNova(w);
33         z = null(A);
34         B = A(1:2,1:2);
35         if z(1) > 0
36             z = -z;
37         end
38         w = w + 1.1*pas*z;
39     else
40         A = JNova(w);
41         z = null(A);
42         B = A(1:2,1:2);

```

```

42         if z(1) > 0
43             z = -z;
44         end
45         w = w + 0.9*pas*z;
46     end
47     cont = cont + 1;
48 end
49
50
51 figure(1)
52 plot(H(2:end),Fw(2:end),'b. ')
53 title('Fw vs H')
54 xlabel('H')
55 ylabel('Fw')
56 grid on
57 set(gcf,'PaperUnits','centimeters');
58 set(gcf,'papersize',[15 11])
59 set(gcf,'paperposition',[0 0 15 11]);
60 print('-dpdf','FwH.pdf')
61
62 figure(2)
63 plot(H(2:end),Fs(2:end),'b. ')
64 title('Fs vs H')
65 xlabel('H')
66 ylabel('Fs')
67 grid on
68 set(gcf,'PaperUnits','centimeters');
69 set(gcf,'papersize',[15 11])
70 set(gcf,'paperposition',[0 0 15 11]);
71 print('-dpdf','FsH.pdf')

```

**Figura 14**

DEF\_vapslter.m

```

1  clear all; clc;
2
3  %Condicions initials
4  fs=0;
5  fw=5;
6  h = 0;
7  Fw = [fw];
8  Fs = [fs];
9  H = [];
10 w= [fw,fs,h]';
11 pas = 0.01;
12 Z = [];
13 I = [];
14 E = [];

```

```

15 cont = 1;
16 while w(3) < 1
17     cand = w;
18     it = 0;
19     while norm(fEC(cand)) > (1/2)*10^(-8) && it < 10 %per si itera moltes
20         vegades que s'aturi
21         %metode extrems condicionats
22         A=JNova(cand);
23         b=fEC(cand);
24         p = -(A')*inv(A*A')*b;
25         cand = cand + p;
26         it = it + 1;
27     end
28     if it < 10
29         w = cand;
30         Fw(cont) = w(1);
31         Fs(cont) = w(2);
32         H(cont) = w(3);
33         B = JNova(w);
34         z = null(B);
35         A = B(1:2,1:2);
36         e = eig(A);
37         E = [E,e];
38         I = [I,it];
39         if z(1) > 0
40             z = -z;
41         end
42         w = w + 1.1*pas*z;
43     else
44         A = JNova(w);
45         z = null(A);
46         if z(1) > 0
47             z = -z;
48         end
49         w = w + 0.9*pas*z;
50     end
51     cont = cont + 1;
52 end
53
54 figure(1)
55 hold on
56 plot(1:size(E,2),E(1,1:end),'r-')
57 plot(1:size(E,2),E(2,1:end),'b-')
58 plot(1:size(H,2),H(1:end),'g-')
59 grid on
60 title('Valors propis')
61 legend('vap1','vap2','h')
62 set(gcf,'PaperUnits','centimeters');
63 set(gcf,'papersize',[15 11])
64 set(gcf,'paperposition',[0 0 15 11]);
65 print('-dpdf','vapsIter.pdf')

```

## Figura 15 a 18

DEF\_limSingP.m

```

1  clear all; clc;
2  format short;
3  load('solP.mat') %solu_1
4  p = solu_1;
5  load('solQ.mat')%solu_0
6  q = solu_0;
7
8  eps = 1*10^(-2);
9  eps1 = 1*10^(-4);
10 opts = odeset('RelTol',1e-12,'AbsTol',1e-12);
11
12 P = JHipo3(p(1:2),p(3));
13 [PD,PV] = eig(P);
14 Q = JHipo3(q(1:2),q(3));
15 [QD,QV] = eig(Q);
16
17 p1 = (p(1) + eps1*PD(1,1));
18 p2 = (p(2) + eps1*PD(2,1));
19 p0 = [p1,p2];
20 [T,Y] = ode45(@sistema, [0:1:10000] , p0,opts);
21
22 p1 = (p(1) - eps1*PD(1,1));
23 p2 = (p(2) - eps1*PD(2,1));
24 p0 = [p1,p2];
25 [T,Y2] = ode45(@sistema, [0:1:100000] , p0,opts);
26
27 p0 = [p(1) + eps1*PD(1,2),p(2) + eps1*PD(2,2)];
28 [T,Y3] = ode45(@sistemaE, [0:0.2:8] , p0,opts);
29
30 p0 = [p(1) - eps1*PD(1,2),p(2) - eps1*PD(2,2)];
31 [T,Y4] = ode45(@sistemaE, [0:0.2:8] , p0,opts);
32
33 vepP = [p(1),p(1) + eps1*PD(1,1); p(2),p(2) + eps1*PD(2,1)];
34 vepP2 = [p(1),p(1) + eps1*PD(1,2); p(2),p(2) + eps1*PD(2,2)];
35
36 H=solu_1(3);
37
38
39 figure(1)
40 hold on
41 grid on
42 line(vepP(1,:),vepP(2,:), 'Color','k')
43 line(vepP2(1,:),vepP2(2,:), 'Color','k')
44 plot(Y(:,1),Y(:,2),'b',Y2(:,1),Y2(:,2),'r',Y3(:,1),Y3(:,2),'g',Y4(:,1),Y4(:,2),'g',p(1),p(2));
45 ez1 = ezplot(@(fw,fs) F(fw,fs,H));
46 ez2 = ezplot(@(fw,fs) G(fw,fs,H));
47 set(ez1,'color',[0.7 0.4 0.1])

```

```

48 set(ez2,'color',[0 0 1])
49 xlabel('fw')
50 ylabel('fs')
51 title(strcat('h = ',num2str(H)))
52 xlim([-1 6])
53 ylim([-1 6])
54 hold off
55 set(gcf,'PaperUnits','centimeters');
56 set(gcf,'papersize',[15 11])
57 set(gcf,'paperposition',[0 0 15 11]);
58 print('-dpdf','IntNumP_iso')
59
60 save('Yp.mat','Y')
61 save('Y2p.mat','Y2')
62 save('Y3p.mat','Y3')
63 save('Y4p.mat','Y4')

```

#### DEF\_limSingP\_ampl.m

```

1  clc; clear all;
2  load('solP.mat') %solu_1
3  p = solu_1;
4  eps1 = 1*10^(-4);
5
6  P = JHipo3(p(1:2),p(3));
7  [PD,PV] = eig(P);
8  p1 = (p(1) + eps1*PD(1,1));
9  p2 = (p(2) + eps1*PD(2,1));
10 vepP = [p(1),p(1) + eps1*PD(1,1); p(2),p(2) + eps1*PD(2,1)];
11 vepP2 = [p(1),p(1) + eps1*PD(1,2); p(2),p(2) + eps1*PD(2,2)];
12
13
14 load('Yp.mat')
15 load('Y2p.mat')
16 load('Y3p.mat')
17 load('Y4p.mat')
18
19 H=solu_1(3);
20
21 opts = odeset('RelTol',1e-12,'AbsTol',1e-12);
22 p0 = [p1,p2];
23 [T,Y] = ode45(@sistema, [0:100:400000], p0,opts);
24
25 p0 = [p(1) + eps1*PD(1,2),p(2) + eps1*PD(2,2)];
26 [T,Y3] = ode45(@sistemaE, [-8:0.2:0], p0,opts);
27
28 p0 = [p(1) - eps1*PD(1,2),p(2) - eps1*PD(2,2)];
29 [T,Y4] = ode45(@sistemaE, [-8:0.2:0], p0,opts);
30
31 figure(1)
32 hold on

```

```

33 grid on
34 plot(Y(:,1),Y(:,2),'b',Y2(:,1),Y2(:,2),'r',Y3(:,1),Y3(:,2),'g',Y4(:,1),Y4(:,2),'g',p(1
35 xlabel('fw')
36 ylabel('fs')
37 title(strcat('h = ',num2str(H)))
38 xlim([4.3988 4.4])
39 ylim([0.2304 0.2310])
40 hold off
41 set(gcf,'PaperUnits','centimeters');
42 set(gcf,'papersize',[15 11])
43 set(gcf,'paperposition',[0 0 15 11]);
44 print('-dpdf','IntNumP_iso_ampl')

```

#### DEF\_sistemaP.m

```

1 function dy = sistema(t,y)
2 dy = zeros(2,1);
3
4 twh = 700;
5 tsh = 600;
6 tw = 5;
7 ts = 1;
8 Hmin = -1.6;
9 Hmax = 1.4;
10 gsw = -2;
11 gws = -2;
12 Wmax = 6.5;
13 bw = -0.3;
14 aw = 0.5;
15 Smax = 5;
16 as = 0.25;
17 ys = 4;
18 yw = 5;
19
20 load('solP.mat')
21 dy(1) = (1/tw)*(-y(1)+((Wmax/2)*(1+tanh((gsw*tanh(y(2)/ys)-bw)/aw))));
22 dy(2) = (1/ts)*(-y(2)+((Smax/2)*(1+tanh((gws*tanh(y(1)/yw) +
    1.5*solu_1(3))/as))));
23 end

```

#### DEF\_sistemaEP.m

```

1 function dy = sistema(t,y)
2 dy = zeros(2,1);
3
4 twh = 700;
5 tsh = 600;
6 tw = 5;
7 ts = 1;
8 Hmin = -1.6;

```

```

9 Hmax = 1.4;
10 gsw = -2;
11 gws = -2;
12 Wmax = 6.5;
13 bw = -0.3;
14 aw = 0.5;
15 Smax = 5;
16 as = 0.25;
17 ys = 4;
18 yw = 5;
19
20 load('solP.mat')
21 dy(1) = -(1/tw)*(-y(1)+((Wmax/2)*(1+tanh((gsw*tanh(y(2)/ys)-bw)/aw)))));
22 dy(2) = -(1/ts)*(-y(2)+((Smax/2)*(1+tanh((gws*tanh(y(1)/yw) +
    1.5*solu_1(3))/as)))));
23 end

```

#### DEF\_limSingQ.m

```

1 clear all; clc;
2 format short;
3 Load('solP.mat') %solu_1
4 p = solu_1;
5 load('solQ.mat')%solu_0
6 q = solu_0;
7
8 eps = 1*10^(-2);
9 eps1 = 1*10^(-4);
10 opts = odeset('RelTol',1e-12,'AbsTol',1e-12);
11
12 Q = JHipo3(q(1:2),q(3));
13 [qD,qV] = eig(Q);
14
15 q1 = (q(1) - eps1*qD(1,1));
16 q2 = (q(2) - eps1*qD(2,1));
17 q0 = [q1,q2];
18 [T,Y] = ode45(@sistemaQ, [0:1:100000] , q0,opts);
19
20 q1 = (q(1) + eps1*qD(1,1));
21 q2 = (q(2) + eps1*qD(2,1));
22 q0 = [q1,q2];
23 [T,Y2] = ode45(@sistemaQ, [0:1:100000] , q0,opts);
24
25 q0 = [q(1) + eps1*qD(1,2),q(2) + eps1*qD(2,2)];
26 [T,Y3] = ode45(@sistemaEQ, [0:0.2:8] , q0,opts);
27
28 q0 = [q(1) - eps1*qD(1,2),q(2) - eps1*qD(2,2)];
29 [T,Y4] = ode45(@sistemaEQ, [0:0.2:8] , q0,opts);
30
31 vepQ = [q(1),q(1) + eps1*qD(1,1); q(2),q(2) + eps1*qD(2,1)];
32 vepQ2 = [q(1),q(1) + eps1*qD(1,2); q(2),q(2) + eps1*qD(2,2)];

```

```

33
34
35 figure(1)
36 hold on
37 grid on
38 line(vepQ(1,:),vepQ(2,:), 'Color','k')
39 line(vepQ2(1,:),vepQ2(2,:), 'Color','k')
40 plot(Y(:,1),Y(:,2), 'b', Y2(:,1),Y2(:,2), 'r', Y3(:,1),Y3(:,2), 'g', Y4(:,1),Y4(:,2), 'g', q(1
41 ez1 = ezplot(@(fw,fs) F(fw,fs,H));
42 ez2 = ezplot(@(fw,fs) G(fw,fs,H));
43 set(ez1, 'color', [0.7 0.4 0.1])
44 set(ez2, 'color', [0 0 1])
45 xlabel('fw')
46 ylabel('fs')
47 title(strcat('h = ', num2str(H)))
48 xlim([-1 6])
49 ylim([-1 6])
50 hold off
51
52 set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
53 set(gcf, 'papersize', [15 11])
54 set(gcf, 'paperposition', [0 0 15 11]);
55 print('-dpdf', 'IntNumQ_iso')
56
57 save('Yq.mat', 'Y')
58 save('Y2q.mat', 'Y2')
59 save('Y3q.mat', 'Y3')
60 save('Y4q.mat', 'Y4')

```

#### DEF\_limSingQ\_ampl.m

```

1  clc; clear all;
2  load('solQ.mat') %solu_1
3  q = solu_0;
4  eps1 = 1*10^(-4);
5
6  Q = JHipo3(q(1:2),q(3));
7  [QD,QV] = eig(Q);
8  q1 = (q(1) + eps1*QD(1,1));
9  q2 = (q(2) + eps1*QD(2,1));
10 vepQ= [q(1),q(1) + eps1*QD(1,1); q(2),q(2) + eps1*QD(2,1)];
11 vepQ2 = [q(1),q(1) + eps1*QD(1,2); q(2),q(2) + eps1*QD(2,2)];
12
13 load('Yq.mat')
14 load('Y2q.mat')
15 load('Y3q.mat')
16 load('Y4q.mat')
17
18 H=solu_0(3);
19
20 opts = odeset('RelTol',1e-12,'AbsTol',1e-12);

```



```

21 q0 = [q1,q2];
22
23 figure(1)
24 hold on
25 grid on
26 plot(Y(:,1),Y(:,2),'b',Y2(:,1),Y2(:,2),'r',Y3(:,1),Y3(:,2),'g',Y4(:,1),Y4(:,2),'g',q(1),q(2))
27 ylim([2.6703 2.6709])
28 xlim([0.1965 0.1968])
29 xlabel('fw')
30 ylabel('fs')
31 title(strcat('h = ',num2str(H)))
32 hold off
33 set(gcf,'PaperUnits','centimeters');
34 set(gcf,'papersize',[15 11])
35 set(gcf,'paperposition',[0 0 15 11]);
36 print('-dpdf','IntNumQ_iso_ampl')

```

#### DEF\_sistemaQ.m

```

1 function dy = sistemaQ(t,y)
2 dy = zeros(2,1);
3
4 twh = 700;
5 tsh = 600;
6 tw = 5;
7 ts = 1;
8 Hmin = -1.6;
9 Hmax = 1.4;
10 gsw = -2;
11 gws = -2;
12 Wmax = 6.5;
13 bw = -0.3;
14 aw = 0.5;
15 Smax = 5;
16 as = 0.25;
17 ys = 4;
18 yw = 5;
19
20 load('solQ.mat')
21 dy(1) = (1/tw)*(-y(1)+((Wmax/2)*(1+tanh((gsw*tanh(y(2)/ys)-bw)/aw)))));
22 dy(2) = (1/ts)*(-y(2)+((Smax/2)*(1+tanh((gws*tanh(y(1)/yw) +
    1.5*solu_0(3))/as)))));
23 end

```

#### DEF\_sistemaEQ.m

```

1 function dy = sistema(t,y)
2 dy = zeros(2,1);
3
4 twh = 700;

```

```

5  tsh = 600;
6  tw = 5;
7  ts = 1;
8  Hmin = -1.6;
9  Hmax = 1.4;
10 gsw = -2;
11 gws = -2;
12 Wmax = 6.5;
13 bw = -0.3;
14 aw = 0.5;
15 Smax = 5;
16 as = 0.25;
17 ys = 4;
18 yw = 5;
19
20 load('solQ.mat')
21 dy(1) = -(1/tw)*(-y(1)+((Wmax/2)*(1+tanh((gsw*tanh(y(2)/ys)-bw)/aw)))));
22 dy(2) = -(1/ts)*(-y(2)+((Smax/2)*(1+tanh((gws*tanh(y(1)/yw) +
    1.5*solu_0(3))/as)))));
23 end

```

#### DEF\_JHipo3.m

```

1  function [M] = JHipo3(y,h);
2  M = zeros(2,2);
3  tw = 5;
4  ts = 1;
5  gsw = -2;
6  gws = -2;
7  Wmax = 6.5;
8  bw = -0.3;
9  aw = 0.5;
10 Smax = 5;
11 as = 0.25;
12 ys = 4;
13 yw = 5;
14 fw=y(1);
15 fs=y(2);
16 % H = y(3);
17 M(1,1) = -1/tw;
18 M(1,2) =
    (1/2)*Wmax*gsw*(1-(tanh(fs/ys))^2)*(1-(tanh((gsw*tanh(fs/ys)-bw)/aw))^2)/(tw*ys*aw)
19 M(2,1)=(1/2)*Smax*gws*(1-(tanh(fw/yw))^2)*(1-tanh((gws*tanh(fw/yw)+1.5*h)/as))^2/(ts
20 M(2,2) = -1/ts;
21 % M(1,3) = 0;
22 % M(2,3) =(0.5)*Smax*1.5*(1-(tanh((gws*tanh(fw/yw)+1.5*H)/as))^2)/(as*ts);
23 end

```

### Càlculs secció 4.1.4

DEF\_subSistLent\_TempsH.m

```

1 %Dades
2 tsh = 700;
3 twh = 600;
4 tw = 5;
5 ts = 1;
6 Hmin = -1.6;
7 Hmax = 1.4;
8 gsw = -2;
9 gws = -2;
10 Wmax = 6.5;
11 bw = -0.3;
12 aw = 0.5;
13 Smax = 5;
14 as = 0.25;
15 ys = 4;
16 yw = 5;
17
18 %Solucions sist 3x3
19 x0 = [5,0,0];
20 x1 = [0,5,1];
21
22 fun = @f;
23 % options = optimoptions('fsolve','display','iter','MaxFunEvals',50000,
    'MaxIter',5000);
24 solu_1 = fsolve(fun,x0);
25 solu_0 = fsolve(fun,x1);
26
27 solu_0 %solu_0(3) = h0
28 solu_1 %solu_1(3) = h1
29 save('solP.mat','solu_1');
30 save('solQ.mat','solu_0');
31
32
33 %temps per h1
34 %Funcio hw(t) = Hmax - (Hmax - solu_0(3))*exp(-t/twh)
35
36 %El valor de h0 ens permet calcular la constant, que resulta que es 1,
37 %independent del valor de h0.
38 % hw(Tw) = h1
39 Tw = -twh*log((Hmax - solu_1(3))/(Hmax - solu_0(3)))
40
41 %Funcio hs(t) = Hmin - (solu_1(3)-Hmin)*exp(-t/tsh)
42 % hs(Ts) = h0
43 Ts = +tsh*log((Hmin - solu_1(3))/(Hmin - solu_0(3)))

```

DEF\_f\_TempsH.m

```

1 function sol = f(y)
2 twh = 700;

```

```

3  tsh = 600;
4  tw = 5;
5  ts = 1;
6  Hmin = -1.6;
7  Hmax = 1.4;
8  gsw = -2;
9  gws = -2;
10 Wmax = 6.5;
11 bw = -0.3;
12 aw = 0.5;
13 Smax = 5;
14 as = 0.25;
15 ys = 4;
16 yw = 5;
17 sol = zeros(3,1);
18 fw = y(1);
19 fs = y(2);
20 h = y(3);
21
22 sol(1) = (1/tw)*(-y(1)+((Wmax/2)*(1+tanh((gsw*tanh(y(2)/ys)-bw)/aw)))));
23 sol(2) = (1/ts)*(-y(2)+((Smax/2)*(1+tanh((gws*tanh(y(1)/yw) +
      1.5*y(3))/as)))));
24
25 %Determinant
26 syms a b c d
27 a = -1/tw;
28 b =
      (1/2)*Wmax*gsw*(1-tanh(fs/ys)^2)*(1-tanh((gsw*tanh(fs/ys)-bw)/aw)^2)/(tw*ys*aw);
29 c =
      (1/2)*Smax*gws*(1-tanh(fw/yw)^2)*(1-tanh((gws*tanh(fw/yw)+1.5*h)/as)^2)/(ts*yw*as);
30 d = -1/ts;
31 sol(3) = det([a b; c d]);
32 end

```